Universidade de Santiago de Compostela
Facultade de Ciencias de Educación
Departamento de Didáctica das Ciencias Experimentais

SIGNIFICADO REFERENCIAL Y EVALUADO DE LOS CONCEPTOS DE MATRIZ Y DETERMINANTE EN ESTUDIANTES PREUNIVERSITARIOS. UN ESTUDIO A PARTIR DE LA PRÁCTICA INSTRUCCIONAL

TESIS DOCTORAL

Patricia Ferro Jove

Santiago de Compostela
Septiembre, 2011

EL DR. JOSÉ ANTONIO CAJARAVILLE PEGITO,

PROFESOR DE LA UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA.

HACE CONSTAR:

Que el trabajo que se recoge en la memoria titulada

Significado referencial y evaluado de los conceptos de Matriz y Determinante en estudiantes preuniversitarios. Un estudio a partir de la práctica instruccional,

fue realizado bajo su dirección, por la licenciada en Ciencias Matemáticas, Dª Patricia Ferro Jove, en el Departamento de Didáctica das Ciencias Experimentais de la USC, y autoriza su presentación como Tesis de Doctorado, para la obtención del grado de Doctor por parte de la interesada,

Santiago, 5 de Septiembre de 2011

José Antonio Cajaraville Pegito

A mis Abuelos

AGRADECIMIENTOS

La lectura de una tesis doctoral es el último paso en la trayectoria de un estudiante. Es el momento en que uno echa la vista atrás y se da cuenta que tras su trabajo hay mucha gente que ha colaborado, consciente o inconscientemente, en mayor o menor medida, para que se haya alcanzado este objetivo. A todos ellos quiero agradecerles que hoy haya llegado hasta aquí.

Empiezo recordando a mis profesores, a todos, desde los que me enseñaron a leer hasta a los que me impartieron los cursos de doctorado y me han dirigido la tesis doctoral. Gracias al colegio Sagrado Corazón de las Madres Mercedarias y al IES Concepción Arenal, de Ferrol, a la Facultad de Matemáticas y a la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Santiago de Compostela, y a la Facultad de Humanidades de la Universidad de la Coruña. En todas estas instituciones he aprendido a estudiar y a trabajar y a poder ver la vida desde un punto de vista crítico.

Gracias en especial a las dos personas que creyeron posible que yo podía escribir una tesis. A Manuel Ladra, del Departamento de Álgebra, sin cuyos consejos y ayuda yo hubiera abandonado la ilusión por realizar un doctorado; y a José Antonio Cajaraville, a quien le debo parte de este trabajo, gracias por todas tus correcciones, tus consejos y tu tiempo. También al Departamento de Ciencias Experimentales de la USC por todas las facilidades que me han brindado para la realización de este trabajo.

Gracias al IES Monte da Vila de O Grove, con cuyos alumnos realicé esta investigación, y al IES Cabo Ortegal de Cariño, donde he aprendido que el trabajo de un profesor es algo más que dar clase. Sin su colaboración nunca se hubiera podido llevar a cabo esta tesis.

Gracias a toda mi familia y a mis amigos, por estar siempre ahí y por aguantar mis momentos de agobios y desesperación, que han sido muchos. Gracias a mis padres y a Miguel y a Alicia, que se han echado las manos a la cabeza cada vez que llegaba setiembre y yo les decía “creo que voy a empezar a estudiar…”, y aún así en junio seguían aguantándome.

Gracias a Vicent, por seguir queriéndome a pesar de todo.

A Isabel, que me ha enseñado lo que es verdaderamente importante.

Y ya para terminar a aquellos que han sido la razón de ser de esta investigación. Gracias a mis alumnos, por todo, por hacerme madrugar todos los días, por hacerme

seguir trabajando, por aguantar mis explicaciones y mis exámenes, por impulsarme a querer entender por qué vosotros no me entendéis. Gracias por decirme al final de curso "por fin lo he entendido".

INDICE

CAPÍTULO 1: MARCO TEÓRICO

CAPÍTULO 2: DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO 3: MARCO TEÓRICO ESPECÍFICO. ANTECEDENTES EN LA INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO 4: SIGNIFICADOS PERSONALES E INSTITUCIONALES SOBRE EL ÁLGEBRA LINEAL

CAPÍTULO 5: SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DE REFERENCIA PARA EL ESTUDIO DE MATRICES Y DETERMINANTES EN 2º DE BACHILLERATO: ANÁLISIS SEMIÓTICO DE UN TEXTO.

CAPÍTULO 6: SIGNIFICADOS PERSONALES DE LOS ALUMNOS DE 2º DE BACHILLERATO RELATIVOS AL ÁLGEBRA LINEAL

CAPÍTULO 7: CONCLUSIONES

ÍNDICE DE TABLAS Y FIGURAS

Introducción.

Presentamos aquí una síntesis de las razones que nos han conducido al diseño de esta investigación, al planteamiento del problema y cuestiones que orientan este estudio.

En palabras de Godino (2003b), la Didáctica de las Matemáticas, como campo de investigación científica, estudia los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tratando de identificar los factores que los condicionan y de construir teorías que proporcionan un control práctico sobre los sistemas didácticos. Schoenfeld (2000) afirma que la investigación en educación matemática tiene dos propósitos, uno puro y otro aplicado; puro, en cuanto intenta comprender la naturaleza del pensamiento matemático, su enseñanza y el aprendizaje; y aplicado, ya que usa esa comprensión para mejorar las capacidades de los sujetos para resolver campos de problemas planteados en diferentes contextos.

El trabajo que presentamos en esta memoria tiene su origen en un problema docente que, inicialmente, puede formularse como el *problema de la relación entre los significados personales e institucionales, observados en una muestra de estudiantes al estudiar contenidos de Álgebra Lineal que forman parte del currículo de 2º de Bachillerato.* Se trata, obviamente, de un problema relativo a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y que, por lo tanto atañe al Sistema de Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas en su conjunto.

El Álgebra y, más concretamente, el Álgebra Lineal desempeña un papel esencial en la organización de los conocimientos matemáticos, sobre todo pensando en los futuros estudios universitarios para los cuales se preparan los alumnos de 2º de Bachillerato. Su importancia dentro de la propia matemática, como herramienta fundamental en la organización de información, resolución de sistemas de ecuaciones o paso previo al estudio de la geometría es evidente. La noción de "ecuación" y las relacionadas con este concepto, forman un puente entre la función cotidiana de la inteligencia, en el estudio y análisis de campos de problemas matemáticos, y su expresión en lenguaje matemático, a través de la formulación de modelos matemáticos de dichos problemas, para poder sistematizar sus estudio y planificar sus soluciones.

En esta introducción pretendemos, en primer lugar, situar el problema docente citado en un ámbito mucho más amplio, que no depende sólo de los sujetos de las instituciones escolares (sean estos estudiantes o profesores), sino también de los currículum oficiales y las Pruebas de Acceso a la Universidad. En segundo lugar queremos subrayar la necesidad ineludible de plantear y abordar dicha problemática en el seno de un proyecto de investigación, que pueda tomar en consideración el problema de la Educación Matemática y las exigencias que se plantean en el acceso a los estudios universitarios, a través de las pruebas de Selectividad, mediante un enfoque unitario.

Para realizar este estudio hemos elegido un marco teórico general, en el que se contemplan constructos de la teoría de campos conceptuales (Vergnaud, 1990), la resolución de problemas (Pérez, 1994, Vilanova *et al.*, 2001) y, sobre todo, las técnicas de análisis derivadas del enfoque ontosemiótico (EOS) desarrollados por Godino y cols. (Godino y Batanero, 1994b; Godino, 2002b, Godino, Batanero y Roa, 2005), y un marco teórico específico: investigaciones sobre la problemática de enseñanza/aprendizaje del Algebra Lineal y un resumen histórico de su desarrollo. Se ha indagado, además, en la naturaleza del propio conocimiento matemático y en el estudio histórico-epistemológico de los objetos a estudiar, así como en la importancia del Álgebra Lineal, tanto a nivel interno de la Matemática, como en su aplicación a diversos campos de problemas.

Uno de los intereses de la Didáctica de las Matemáticas es identificar el significado que los alumnos atribuyen a los objetos matemáticos, así como explicar la construcción de estos significados como consecuencia de la instrucción. Si aceptamos que un sujeto "comprende" el significado de un objeto cuando es capaz de reconocer sus propiedades y representaciones, relacionarlo con otros objetos y aplicarlo a una variedad de situaciones problemáticas prototípicas, estaremos relacionando la idea de "significado" con la de "comprensión" (Godino, Batanero, Flores, 1998). A continuación se ha pasado a observar cómo se adaptan los objetos matemáticos relacionados con el Álgebra Lineal, para hacerlos viables en los sistemas educativos, es decir, cómo se realiza su transposición (Chevallard, 1985) a la clase de matemáticas.

El problema nuclear de esta investigación se refiere al estudio didáctico de las nociones de matriz y determinante, lo que comprenderá su génesis epistemológica, el estatuto que recibe en la enseñanza y la caracterización de las relaciones personales de los estudiantes de 2º de Bachillerato con estos objetos matemáticos.

Pensamos que el interés que puede derivarse de este trabajo para la instrucción matemática es evidente, ya que permite poner de manifiesto la distancia que, en numerosas ocasiones, existe entre los conceptos formalmente introducidos y los conocimientos efectivamente construidos por los alumnos, determinando los factores y fenómenos didácticos que condicionan este hecho.

Las fases de que consta esta investigación son las siguientes:

1. Estudio de la noción de campo conceptual y de objeto matemático, incidiendo especialmente en el concepto de significado, analizando las aportaciones de diferentes investigaciones. Se presentará además el análisis ontosemiótico como marco vertebrador, al facilitarnos técnicas de análisis para el desarrollo de nuestra investigación.

2. Definición del problema de investigación, explicando su génesis, los objetivos generales y específicos de la investigación, las hipótesis planteadas y la metodología seguida.

3. Situaremos nuestro trabajo en el seno de la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra Lineal como área problemática. Para ello, haremos un recorrido por las investigaciones más significativas que se han llevado a cabo sobre el significado de esta disciplina, el currículo de 2º de Bachillerato y las Pruebas de Acceso a la Universidad, referidas siempre a las nociones objeto de estudio. Se complementa este estudio con una síntesis, desde un punto de vista histórico-epistemológico, de la evolución de las nociones de matriz y determinante, tratando de identificar las variables y factores condicionantes que han determinado distintos estadios en su desarrollo. Consideramos que dicho estudio nos aportará conocimientos relevantes para intentar comprender la problemática del proceso de enseñanza-aprendizaje de estas nociones en 2º de Bachillerato, así como para analizar los significados personales de los estudiantes.

4. El estudio del currículo y de libros de texto, relativos a la enseñanza/aprendizaje del Álgebra Lineal, nos proporcionarán elementos valiosos para analizar propuestas metodológicas y secuencias didácticas que conllevan la realización de determinadas prácticas, las cuales nos permitirán indagar sobre determinados fenómenos didácticos ligados al proceso de aprendizaje de este ámbito de las matemáticas.

5. Realizamos un estudio experimental, a través del cual nos proponemos evaluar los significados personales, que construye una muestra de alumnos de 2º de Bachillerato, sobre nociones relacionadas con el Álgebra Lineal. Establecemos, asimismo, las relaciones pertinentes entre estos significados y las condiciones y restricciones ejercidas por el sistema de enseñanza en el que han estado inmersos dichos estudiantes.

6. Por último, establecemos las conclusiones más relevantes que extraemos de la investigación, y los nuevos retos pendientes, de cara al futuro, de aspectos que no han quedado suficientemente clarificados y que deberán ser objeto de estudios con mayor profundidad.

Cada una de estas fases de la investigación se describe en los diferentes capítulos de que consta este trabajo.

A la hora de realizar nuestros análisis daremos prioridad a los métodos cualitativos sobre los cuantitativos. La investigación cualitativa ofrece procedimientos para obtener información descriptiva sobre personas por medio de la observación y las entrevistas en su ambiente natural, pero, por otro lado, no supone renunciar completamente a la investigación cuantitativa. De hecho, como afirma Batanero (2002c), la mayor parte de las investigaciones no pueden ser definidas como cualitativas o cuantitativas puras, sino que comparten rasgos de uno u otro tipo o bien combinan diferentes partes con distintas aproximaciones.

Un diseño experimental debería considerar muestras suficientemente amplias, obtenidas por asignación aleatoria. Como autocrítica a este trabajo, hemos de mencionar que esta asignación aleatoria no ha sido posible, por lo que se ha optado por controlar el diseño de la investigación y aumentar el tamaño de la muestra. Así, se han estudiado las pruebas realizadas por cinco grupos de alumnos pertenecientes a tres años diferentes. Por lo tanto, estamos ante un diseño cuasi-experimental.

Ha sido necesario construir nuestro propio instrumento de evaluación, por lo que en el capítulo 6.3.3 lo hemos descrito con detalle. Ello permitirá la comparación de resultados con los de otros estudios sobre cuestiones relacionadas, confiriéndole una utilidad científica para investigaciones posteriores. Por supuesto, hay que añadir que toda construcción de este tipo presenta componentes subjetivos, que hemos de minimizar.

Para completar nuestra técnica de recogida de datos hemos realizado una entrevista personal. Los datos obtenidos en ella se usarán para complementar y contrastar los resultados provenientes del otro instrumento de evaluación.

La selección de la muestra no se determinó al principio del estudio, sino después de estudiar manuales de 2º de Bachillerato, diversos exámenes de Selectividad y diferentes investigaciones sobre Enseñanza de Matemáticas, así como el Trabajo de Investigación Tutelado realizado por la investigadora (Ferro, 2004), analizando los problemas surgidos en dicho trabajo y los errores prototípicos de los estudiantes evaluados.

Debemos mencionar, además, que esta investigación tiene como pretensión servir de reflexión sobre nuestras prácticas docentes y sobre la utilidad del currículo oficial y el contenido de las Pruebas de Acceso a la Universidad. Intentamos proporcionar explicaciones de cómo los alumnos logran adquirir determinados sentidos de las nociones y prácticas que hemos estudiado, y por qué cometen ciertos errores. Consideramos que el Álgebra Lineal es suficientemente importante, dentro del ámbito de las Matemáticas, como para que su enseñanza se realice con garantías de que los estudiantes han logrado dotar de sentido preciso a algunas de las componentes básicas de su significado institucional. Esperamos que este trabajo ayude a la reflexión sobre las prácticas que, sobre esta temática, realizamos en nuestras aulas.

Capítulo 1.

Marco teórico.

0. Introducción

En este capítulo, destinado a la revisión de la literatura científica que hemos utilizado como marco de referencia de nuestra investigación, presentaremos los modelos teóricos considerados, que están organizados en tres programas diferentes: Campos Conceptuales, Resolución de Problemas y Cognición Matemática.

El capítulo dedicado a los Campos Conceptuales responde a la necesidad de delimitar nuestro campo de estudio. En palabras de Godino (2003a), los conceptos matemáticos se dotan de significado a partir de una variedad de situaciones; cada una de ellas no puede ser analizada usualmente con la ayuda de un solo concepto sino que precisa de varios de ellos. Basándonos en la teoría presentada por Vergnaud (1990), veremos que un campo conceptual está fomado por un conjunto de situaciones y el conjunto de conceptos que permiten analizar esas situaciones como tareas matemáticas. Esto nos permitirá identificar en nuestra investigación las situaciones y los conceptos que formarán parte del campo conceptual que queremos estudiar.

Consideramos importante, además, introducir un capítulo dedicado a la Resolución de Problemas, ya que son muchas las visiones que consideran que las matemáticas *son* resolución de problemas y que, por tanto, el principal objetivo que debe tener un profesor de matemáticas en el aula sería el de enseñar a los alumnos a resolver diferentes situaciones. Para ello es necesario explicitar con claridad qué se entiende por problema matemático, distinguiéndolo de lo que es un ejercicio puramente rutinario.

Por último, la parte referida a la Cognición Matemática presenta todos los conceptos y herramientas relacionados con el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (EOS), instrumento clave en nuestra investigación, ya que nos permitirá analizar con rigor tanto los libros de texto usados por los alumnos como los exámenes realizados por ellos.

1.1. *Campos Conceptuales.*

La teoría de los campos conceptuales es una teoría cognitivista, que pretende proporcionarnos un marco coherente y algunos principios de base para el estudio del desarrollo y del aprendizaje de competencias complejas, especialmente las que se refieren a las ciencias y a las técnicas. Su principal finalidad es proporcionar una base que permita comprender las filiaciones y las rupturas entre conocimientos en los niños y adolescentes.

Esta teoría no es específica de las matemáticas, pero ha sido elaborada principalmente para explicar procesos de conceptualización progresiva de las estructuras aditivas, multiplicativas, relaciones número-espacio, y del Álgebra.

Un campo conceptual está formado por dos conjuntos básicos: uno, de situaciones y otro, de conceptos que permiten analizar esas situaciones como tareas matemáticas. Un campo conceptual es un espacio de problemas o de situaciones-problema en las que el tratamiento implica conceptos y procedimientos de varios tipos en estrecha conexión (Vergnaud, 1990).

Un concepto no puede ser reducido a su definición, al menos si se está interesado en su aprendizaje y enseñanza. A través de las situaciones y de los problemas que se pretenden resolver es como un concepto adquiere sentido para el niño" (Vergnaud, 1990). Cuando las ideas son nuevas para el estudiante, una situación sirve para mostrar la necesidad de estas ideas (Godino, Batanero, Flores, 1998).

Estas situaciones pueden ser de dos tipos: (Vergnaud, 1990)

1º) Clases de situaciones para las cuales el sujeto dispone en su repertorio, en un momento dado de su desarrollo y bajo ciertas circunstancias, de competencias necesarias para su tratamiento relativamente inmediato.

2º) Clases de situaciones para las cuales el sujeto no dispone de todas las competencias necesarias, lo que le obliga a un tiempo de reflexión y de explicación, de dudas, tentativas abortadas, y le conduce eventualmente al éxito, o al fracaso.

El concepto de *esquema* es interesante para ambas clases de situaciones, pero no funciona de la misma manera en ambos casos. Llamamos *esquema* a la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dada. Las competencias matemáticas son sostenidas por esquemas organizadores de la conducta. El funcionamiento cognitivo del alumno comporta operaciones que se automatizan progresivamente (por ejemplo, cambiar de signo cuando se cambia de miembro) y de decisiones conscientes que permiten tener en cuenta valores particulares de las variables de la situación. La automatización es una de las manifestaciones más visibles del carácter invariante de la organización de la acción.

Es en los esquemas donde se deben investigar los conocimientos en acto del sujeto, que son los elementos cognitivos que permiten a la acción del sujeto ser operatoria. Son totalidades organizadas, que permiten generar una clase de conductas diferentes en función de las características particulares de cada una de las situaciones de la clase a la cual se dirige. Los esquemas organizan la conducta del sujeto para una clase de situaciones dada, pero organizan a la vez la acción y la actividad de representación simbólica, especialmente lingüística, que acompaña a esta acción.

Para Vergnaud (1990) los algoritmos son esquemas, o los esquemas son objetos del mismo tipo lógico que los algoritmos, aunque les falta la propiedad de lograr el fin con seguridad en un número finito de pasos. Un esquema reposa siempre sobre una conceptualización implícita.

Se designa por la expresión "concepto-en-acto" y "teorema-en-acto" los conocimientos convertidos en los esquemas.

El concepto de esquema se aplica fácilmente a la primera categoría de situaciones vistas anteriormente, aquellas para las cuales el sujeto dispone de las competencias necesarias, y menos a la segunda categoría puesto que el sujeto duda e intenta varias aproximaciones.

El funcionamiento cognitivo de un sujeto o de un grupo de sujetos en situación reposa sobre el repertorio de esquemas disponibles, anteriormente formados, de cada uno de los objetos considerados individualmente. Cada esquema es relativo a una clase de situaciones cuyas características son bien definidas, aunque también puede ser aplicado por un sujeto individual a una clase amplia. Un esquema es una función temporalizada de argumentos, que permite generar series de diferentes acciones y de recogida de información en función de los valores de las variables de la situación.

La operacionalidad de un concepto debe ser experimentada por medio de situaciones variadas y el investigador debe analizar una gran variedad de conductas y de esquemas para comprender en qué consiste un concepto, desde el punto de vista cognitivo.

"Un concepto es una tripleta de tres conjuntos C(S,I,Γ)

S: conjunto de situaciones que dan sentido al concepto (referencia).

I: conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operacionalidad de los esquemas (significado).

Γ: conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento (significante)". (Vergnaud, 1990)

Para Godino, Batanero y Roa (2005), esta modelización del conocimiento matemático no explicita si los objetos (conceptos y sus constituyentes) hacen referencia tanto a una realidad cognitiva individual como a otra cultural (institucional), o si se refieren a una sola de dichas realidades. Tampoco hacen referencia a las acciones de los sujetos ante las situaciones como origen del conocimiento. No se reconoce la dialéctica entre lo particular y lo general, ni las relaciones instrumentales y representacionales entre las diversas entidades matemáticas.

Godino y Batanero (1998b) esbozan un modelo teórico que incluye los siguientes tipos de entidades elementales, que se corresponden con los elementos de la tripleta conceptual de Vergnaud:

- *Entidades ostensivas*: todo tipo de representaciones materiales usadas en la actividad matemática (términos, expresiones, notaciones, símbolos, gráficos, tablas, diagramas,…).
- *Entidades extensivas*: problemas, fenómenos, aplicaciones, tareas, situaciones que inducen actividades matemáticas.
- *Entidades intensivas*: ideas matemáticas, generalizaciones, abstracciones (conceptos, proposiciones, procedimientos, teorías)
- *Entidades actuativas*: acciones del sujeto ante situaciones o tareas (describir, operar, argumentar, generalizar). Los autores incluyen esta cuarta categoría porque consideran que la acción del sujeto es fundamental en esta génesis.

Un campo conceptual es un conjunto de situaciones, aunque el concepto de situación no tiene aquí el sentido de *situación didáctica* (Brousseau, 1986b) sino más bien el de tarea. Toda situación compleja se puede analizar como una combinación de tareas de las que es importante conocer la naturaleza y la dificultad propias. También es el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones como tareas matemáticas.

En nuestro caso podríamos hablar del campo conceptual de las matrices, siendo el conjunto de situaciones que requieren cualquier formulación u operación en que intervienen matrices, o del campo conceptual de los determinantes como el conjunto de situaciones que necesitan la utilización, o modelizan un problema a través de determinantes. De todas formas, para nuestro estudio hablaremos del campo conceptual del Álgebra Lineal, entendido siempre como un campo restringido a alumnos de 2º de Bachillerato, y no como el que se considera a nivel de la institución de matemáticos.

El campo conceptual restringido del Álgebra Lineal que analizaremos es, a la vez, el conjunto de situaciones (tareas) cuyo tratamiento implica una o varias operaciones (técnicas) con matrices y determinantes, y todos los conceptos-definición y teoremas (propiedades-proposiciones) que permiten analizar estas situaciones: *fila, columna, rango, combinación lineal, sucesiones, ecuación, elemento inverso*, *método de Gauss*, *regla de Sarrus, regla de Cramer,* etc. También incluiría todas aquellas situaciones que aparecen en otros otros campos del saber como la criptografía, física o economía, pero que se resuelven utilizando constructos y métodos propios del Álgebra Lineal.

Según González (1997), la noción de campo conceptual resulta necesaria por los siguientes motivos:

- Es difícil estudiar separadamente la adquisición de conceptos interconectados, dependientes entre sí desde el punto de vista matemático y que aparecen simultáneamente en los problemas más elementales.

- Desde el punto de vista del desarrollo y de la evolución de los conocimientos en un largo periodo de tiempo, es conveniente establecer dominios amplios de saberes relacionados entre sí, que cubran una amplia variedad de situaciones y que admitan diferente niveles de análisis.

- En el dominio de una misma clase de problemas se mezclan procedimientos, concepciones y representaciones simbólicas diferentes que hacen posible la existencia de distintos niveles o grados de dominio sobre subclases de problemas y que permiten estudiar la evolución de los conocimientos.

El análisis y la categorización de las tareas que tienen que ver con un campo conceptual constituyen un aspecto de vital importancia para diseñar y desarrollar investigaciones que aborden directamente los problemas cotidianos y aporten soluciones inmediatamente aplicables a la práctica educativa con el fin de la mejor comprensión de los objetos matemáticos.

Para estructurar las tareas de un campo conceptual se analizan los siguientes factores: (González, 1997)

- Las características epistemológicas y fenomenológicas del conocimiento matemático, es decir, el conocimiento en sí mismo, sus propiedades, naturaleza y modo de existencia, y el conocimiento contextualizado en una serie de fenómenos y situaciones que le dan significado y que forman parte del medio en el que se desenvuelve el sujeto.

- La cognición, las características cognitivas del sujeto individual que hacen referencia al aprendizaje y al desarrollo cognitivo. Se trata de aquellas características funcionales y estructurales del entendimiento humano que permiten al sujeto, entre otros aspectos, interpretar y dar sentido a las realidades, utilizar y construir instrumentos y comportamientos, organizar, manipular y responder a las situaciones y fenómenos del entorno o, desde un punto de vista más general, adquirir, construir, representar y estructurar el conocimiento para su utilización en diversos ámbitos.

- Las condiciones institucionales en las que entran en juego los factores anteriores: medio escolar, currículum y contexto sociocultural.

1.2. *Acerca de la resolución de problemas.*

> "*Antiguamente se consideraba que la enseñanza de las matemáticas era un arte y, como tal, difícilmente susceptible de ser analizada, controlada y sometida a reglas. Se suponía que el aprendizaje dependía sólo del grado en que el profesor dominara dicho arte y, al mismo tiempo, de la voluntad y la capacidad de los alumnos para dejarse moldear por el artista*". (Gascón, 1998, pp. 8).

Una visión pragmática acerca del significado y la naturaleza de la matemática consiste en considerarla como una construcción social que incluye conjeturas, pruebas y refutaciones y cuyos resultados deben ser juzgados en relación al entorno social y cultural. Según esta visión, se acepta la idea de que el objetivo primario de la educación matemática debería ser que *los alumnos aprendan matemáticas a partir de la resolución de problemas*. De hecho, desde los años ochenta del siglo pasado, la meta fundamental de la enseñanza de las Matemáticas en la mayoría de los países occidentales parece ser que el alumno se convierta en un resolutor competente de problemas. En concreto en el currículum de ESO y Bachillerato que surge de la LOGSE, la resolución de problemas se convierte oficialmente en un contenido, es decir, en algo que hay que enseñar y aprender. Así lo reitera también el Decreto 133/2007 del 5 de julio en el que se menciona la importancia que tiene la resolución de problemas relacionados con la vida diaria y con el mundo laboral. Además, un contexto de resolución de problemas ayuda a que el alumno aprenda a justificar oralmente o por escrito su pensamiento o aprenda a realizar conjeturas.

Godino, Batanero y Navarro-Pelayo (1995) sostienen que “saber” matemáticas por parte de una persona no puede reducirse a identificar las definiciones y propiedades de los objetos matemáticos. Debe implicar ser capaz de usar el lenguaje y el sistema conceptual matemático en la resolución de problemas. Un sujeto no puede atribuir un sentido pleno a los objetos matemáticos a menos que éstos se relacionen con la actividad de la que emergen.

Resuminos, a continuación, algunas de las respuestas a la pregunta: *¿qué es un problema matemático?:*

Pérez (1994) propone clasificar las tareas escolares de matemáticas en ejercicios y problemas:

- *Ejercicios matemáticos.*

Repetición de operaciones matemáticas básicas, sea de forma oral o escrita. También tipos de tareas en las que el alumno conoce, de forma precisa, el procedimiento que tiene que utilizar para alcanzar la solución. En el aula se sigue dedicando mucho tiempo a la solución de ejercicios.

Pérez (1994) distingue entre dos tipos de ejercicios. El primero consiste en la repetición de una determinada técnica previamente expuesta por el profesor. El objetivo es la consolidación y automatización de la técnica. El segundo tipo de ejercicios no sólo pretende que se automaticen una serie de técnicas sino también que se aprendan algunos procedimientos en los que se insertan esas técnicas. Esta tarea obliga al alumno a realizar una traducción del lenguaje hablado al lenguaje matemático.

- *Problemas matemáticos*

El primer paso en la solución de problemas matemáticos consiste en la traducción de las palabras o el formato en que esté planteado a símbolos y representaciones matemáticas. Debe relacionar el problema actual con los conceptos e ideas que tiene almacenados y organizados en la memoria. El contenido de las tareas, su relación con los conocimientos almacenados por el alumno, el contexto en el que se presentan, y la forma y el lenguaje que toman las expresiones hacen que varíe considerablemente la traducción de las tareas a representaciones matemáticas e influyen en la forma de resolverlas. La segunda parte del proceso exige un conocimiento heurístico o estratégico que nos ayude a establecer las metas y los medios útiles para alcanzarlas, así como un conocimiento operativo o algorítmico que nos permita llevar a cabo nuestras estrategias.

Entre las muchas definiciones de *problema* (citadas por Godino, 2003b, pág. 88) nos parecen relevantes las de Lester (1980), que lo define como “una situación en la que se pide a un individuo realizar una tarea para la cual no tiene un algoritmo fácilmente accesible que determine completamente el método de solución” y la de Simon (1978): “un ser humano se enfrenta con un problema cuando intenta una tarea pero no puede llevarla a cabo. Tiene algún criterio para determinar cuando la tarea ha sido llevada a cabo satisfactoriamente”. Son definiciones generales que se refieren a problemas de cualquier índole. Sin embargo, el interés de Godino es dilucidar las características de los problemas o situaciones de tipo matemático y, como ilustración, nos presenta un ejemplo de estimación de una cantidad desconocida, tomando como objeto matemático la “media”. Las observaciones hechas para este ejemplo particular, pensamos que pueden extenderse a cualquier problema en general. Así, puede que en el enunciado de una cuestión y en el desempeño de las tareas correspondientes intervengan objetos matemáticos y se hace necesario precisar, entre otras cosas, la búsqueda, dentro del campo de problemas, de lo esencial entre los distintos contextos, las relaciones con otros objetos y la situación a matematizar.

La relación entre matemáticas y resolución de problemas parece estar implícita tanto en las creencias populares como en determinadas teorías filosóficas, psicológicas y en determinados modelos pedagógicos (Pérez, 1994).

La detección, el planteamiento y posterior resolución de problemas ha constituido, históricamente, el gérmen del desarrollo de la matemática y este es un argumento lo suficientemente poderoso como para tomarlo en cuenta en el proceso de instrucción en matemáticas. Este enfoque, entre otras cosas, haría desaparecer la uniformidad al resolver problemas o haría aparecer un flujo de información en clase que, de otro modo, nunca aparecería. También presenta algún inconveniente: las restricciones del tiempo didáctico determinan un necesario equilibrio entre el tiempo dedicado a la resolución de problemas y el estudio de los objetos matemáticos que emergen de dichos problemas (trabajo de la técnica, nociones teóricas..), que incide directamente sobre la cantidad de contenidos curriculares propuestos para el estudio, en un determinado ciclo educativo.

La expresión “resolución de problemas” se usa para expresar actividades tan diversas como las relativas a la realización de ejercicios más o menos repetitivos, en los procedimientos propios de “pensar matemáticamente”, o las empleadas en la toma de decisiones en distintos contextos.

El problema, por tanto, surge cuando el término “resolución de problemas” se usa con diversos significados.

Vilanova *et al*. (2001) describen brevemente estos significados:

1º) Resolver problemas como contexto.

Desde esta concepción, los problemas son utilizados como vehículos al servicio de otros objetivos curriculares, jugando cinco roles principales:

- Una justificación para enseñar matemáticas.
- Proveer especial motivación a ciertos temas.
- Actividad creativa.
- Medio para desarrollar nuevas habilidades.
- Práctica para dominar ciertas técnicas.

Desde este enfoque, la resolución de problemas no es vista como una meta en sí misma, sino como facilitador del logro de otros objetivos.

2º) Resolver problemas como habilidad.

La resolución de problemas es frecuentemente vista como una de las habilidades a lograr y, por tanto, debe ser enseñada en el currículo. Las técnicas generales de resolución de problemas son enseñadas como un contenido.

3º) Resolver problemas es “hacer matemática”.

El trabajo de los matemáticos es resolver problemas y la matemática consiste en plantearlos (tanto interna como externamente) y buscar soluciones. Uno de los grandes defensores de esta idea es Polya, el cual introduce el término “heurística” para describir el “arte” de la resolución de problemas. De hecho, la historia de la matemática también nos muestra que la resolución de problemas fue la meta de muchas civilizaciones, ya que los documentos que han llegado hasta nosotros de civilizaciones como Egipto, Mesopotamia o China no son más que colecciones de problemas junto con sus soluciones.

En los últimos años, en las investigaciones sobre la resolución de problemas matemáticos, basadas en el *aprendizaje situado*, podemos encontrar cuatro áreas de indagación en las cuales se han hecho progresos:

-La determinación de la dificultad en los problemas.

-Las distinciones entre buenos y malos resolutores de problemas.

-La instrucción en resolución de problemas.

-El estudio de la metacognición.

Para desarrollar estas investigaciones se han tenido en cuenta los siguientes factores: (Schoenfeld, 1992, citado por Vilanova *et al*, 2001, pp. 5) *a) El conocimiento de base:*

Los aspectos centrales a investigar se relacionan con lo que el individuo sabe, cómo se usa ese conocimiento, cuáles son las opciones que tiene a su disposición y por qué se utiliza o descarta algunas de ellas.

b) Las estrategias de resolución de problemas (heurísticas).

Polya (1971) plantea cuatro etapas en la resolución de problemas matemáticos:

1º) Comprender el problema: ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?, ¿cuáles son las condiciones?

2º) Diseñar un plan: ¿se conoce un problema relacionado?, ¿se puede replantear el problema?, ¿se puede convertir en un problema más simple?

3º) Ponerlo en práctica: aplicar el plan, controlar cada paso, comprobar que son correctos.

4º) Examinar la solución: ¿podría haberse resuelto de otra manera?, ¿se pueden usar el resultado o el método para otros problemas?

No obstante, los planteamientos de Polya resultan difíciles de llevar a la práctica (Vilanova y otros, 2001, pp. 9):

a) Los docentes deben poder percibir las implicaciones de las distintas aproximaciones que realizan los alumnos.

b) El docente debe decidir cuándo intervenir sin impedir que la resolución siga quedando en manos de los alumnos.

c) No hay una descripción adecuada de cómo llevar adelante una clase centrada en la resolución de problemas.

c) Los aspectos metacognitivos:

En el curso de una actividad intelectual en algún momento se hace un análisis de la marcha del proceso. El desarrollo de la autorregulación en problemas complejos es difícil y frecuentemente implica modificaciones de conducta que requieren largos periodos de tiempo. Los aspectos metacognitivos se relacionan, en suma, con la manera en que se seleccionan y despliegan los recursos matemáticos y las heurísticas de que se dispone.

d) Los sistemas de creencias:

Las creencias se entienden como la concepción individual y los sentimientos que modelan las formas en que el individuo conceptualiza y actúa en relación con la matemática. Pueden ser consideradas la transición entre los aspectos cognitivos y afectivos. Son propias de cada individuo, incluso para los profesionales de la matemática.

e) La comunidad de práctica o institución matemática.

Muchas de las investigaciones actuales consideran el aprendizaje matemático como una actividad inherentemente social, y constructiva, en lugar de receptiva. Además de los factores propuestos por Schoenfeld (1992) es necesaria también una nueva aproximación a los factores afectivos, que considere a los alumnos como individuos con un sistema de creencias particular.

La educación matemática debería proveer a los estudiantes de la oportunidad de contactar con un amplio rango de problemas, que vayan desde los ejercicios hasta las cuestiones abiertas y situaciones de exploración, Ello contribuiría a modificar determinadas creencias de muchos estudiantes como, por ejemplo, que sólo existe una forma correcta de solucionar cada problema matemático y que esta forma es la regla que el profesor ha utilizado más recientemente en clase. (Lampert, 1990, citado por Pérez, 1994, pp. 59)

Mercado (2003) presenta una experiencia en el aula de resolución de problemas, con alumnos de 4º de ESO trabajando el bloque de Álgebra. Este autor considera que el hecho de que el planteamiento y posterior resolución de estas situaciones haya hecho avanzar la matemática es un argumento suficientemente válido como para tomar la determinación de enfocar el desarrollo de las clases de esta manera. El problema a resolver es el siguiente:

Un granjero dispone de cierto número de jaulas y de conejos. Si introduce 4 conejos en cada jaula, quedan tres conejos libres. Si introduce 5 conejos en cada una, queda una jaula con dos conejos menos. ¿Cuántos conejos y jaulas tiene el granjero?

El profesor intenta que los alumnos resuelvan el problema siguiendo las fases de Polya. Una vez resuelto el problema, la investigación se centró en conocer qué habían copiado los alumnos de todo lo dicho en clase y qué relación había entre lo que se había hablado en el aula y lo que había quedado plasmado en la pizarra. Como conclusión el autor señala que nuestra tarea como profesores debe ir encaminada a favorecer el desarrollo de nuestro alumnado como resolutores independientes de problemas. Además este objetivo debe afrontarse desde distintas vertientes y para ello Mercado (2003) señala entre otras cosas la necesidad de revisar el tiempo dedicado a la resolución de problemas en el aula en contraposición a las tareas de tipo mecánico o de repasar los roles asignados al profesor y a los alumnos. Para este autor un enfoque adecuado de las clases de matemáticas es partir de la resolución de problemas para ir construyendo la teoría matemática necesaria que nos permita dar solución a dichos problemas.

En este trabajo intentaremos analizar en qué medida se trabaja la resolución de problemas dentro del ámbito del Álgebra Lineal y siempre referido al curso que estamos estudiando. Aunque consideramos interesante y necesario estudiar este problema a nivel general, sólo nos ceñiremos a esta parte de las Matemáticas, siendo otro tipo de investigaciones objeto de trabajos futuros.

1.3. *La Demostración en clase de Matemáticas.*

En lógica y fundamentos de las matemáticas, la noción de demostración está íntimamente ligada a las de deducción y de sistema axiomático o formal. En estos contextos, la veracidad de un teorema descansa en la validez de las reglas lógicas usadas en el proceso de demostración. Las situaciones problemáticas tratadas en estos campos son aquellas que tratan de justificar la verdad de un sistema de proposiciones matemáticas o de una parte del mismo. Godino y Recio (2001) describen el objeto "demostración" en estos contextos institucionales como emergente del sistema de prácticas argumentativas analíticas formales, y su significado viene dado por los rasgos intensionales, extensionales y representacionales descritos.

La noción de demostración difiere fuertemente desde el punto de vista de la lógica formal y estudios fundacionales matemáticos respecto a la práctica matemática real, ya que, bajo el esquema lógico, se tornan extraordinariamente complejas, lo que hace que, para muchas investigaciones matemáticas, la formalización completa de las pruebas, incluso aunque fuera posible en principio, se hace imposible en la práctica. Esto hace que la matemática contemporánea esté repleta de demostraciones informales, no axiomatizadas

En el ámbito profesional matemático, las demostraciones son deductivas pero no formales, se expresan mediante el lenguaje ordinario completado con el uso de expresiones simbólicas. Aparecen nuevas estrategias de validación de las proposiciones matemáticas basadas en comprobaciones experimentales y, a menudo, en el uso de ordenadores.

En este contexto la demostración adquiere rasgos distintos. La verdad de las proposiciones matemáticas avanzadas no queda plenamente garantizada. La problemática afrontada por el investigador se centra en la resolución de nuevos problemas, en incrementar el cuerpo de conocimientos y, en menor medida, en la organización y fundamentación del sistema completo de las matemáticas.

En el contexto de las ciencias experimentales, la demostración se basa principalmente en prácticas argumentativas de tipo sustancial por medio de las cuales concluimos que los que es verdadero de ciertos individuos de una clase lo es para toda la clase o bien que lo que es verdadero algunas veces, lo será siempre en circunstancias semejantes o con una cierta probabilidad. La demostración pone en juego los recursos expresivos de los lenguajes ordinario, simbólico y cualquier tipo de dispositivos concretos. La argumentación matemática presenta, en los dominios científicos, connotaciones de prueba empírica.

En la vida cotidiana se suele usar una argumentación informal, que es situacional, dependiente del contexto e incluso de la propia situación emocional del sujeto. En estas situaciones desempeña un papel importante el razonamiento por analogía. Toda inferencia analógica parte de la similitud de dos o más cosas en uno o dos aspectos para concluir la similaridad de esas cosas en algún otro aspecto.

El razonamiento informal es utilizado en todos los dominios de conocimiento, incluso en las matemáticas y las ciencias naturales

En la clase de matemáticas, las argumentaciones que establecen la verdad de los teoremas matemáticos son, en el mejor de los casos, deductivas informales y con frecuencia argumentaciones no deductivas. La matemática elemental constituye un cuerpo de conocimiento cuya verdad, en general, no se pone en duda. Utilizar un sistema de lenguaje formal es, en la mayoría de los casos, casi imposible, dado la edad del alumnado al que nos dirigimos.

En general, los estudiantes de los distintos niveles educativos presentan dificultades para comprender y realizar demostraciones matemáticas.

Observamos en la investigación de Godino y Recio (2001) la rica y compleja variedad de sentidos que adquiere el concepto de "demostración". Reconociendo esta diversidad de significados estaremos en mejores condiciones de estudiar sus componentes, las circunstancias de su desarrollo o los papeles que desempeñan en los distintos contextos.

Dado que los estudiantes se encuentran simultáneamente sujetos a distintas instituciones, en cuyo seno se ponen en práctica distintos esquemas argumentativos, parece razonable que los alumnos tengan dificultades en discriminar el uso respectivo de cada tipo de argumentación. En los distintos niveles de enseñanza se precisa articular de algún modo los diferentes significados de la prueba, desarrollando progresivamente en los estudiantes los conocimientos, la capacidad discriminativa y la racionalidad que se debe poner en juego en cada caso. La enseñanza de las matemáticas debe procurar que los estudiantes controlen y dominen las diversas prácticas argumentativas, así como ser conscientes de las relaciones dialécticas entre las mismas. La enseñanza de esta argumentación debe quedar integrada como una fase más del quehacer matemático, pese a su dificultad.

De Villiers (1993) trata de contestar a la siguiente pregunta: *¿cuáles son realmente las funciones de la demostración (dentro de las propias matemáticas) que pueden ser utilizadas en el aula para hacer de ella una actividad más significativa?*

Tradicionalmente, la función de la demostración ha sido considerada casi exclusivamente en términos de verificación de lo correcto de una proposición matemática, eliminando posibles dudas personales. La mayoría de los profesores en Secundaria mantienen casi exclusivamente esta visión formalista de verificación / convicción sobre la función de la demostración en matemáticas. Con muy pocas excepciones, los profesores parecen creer que una demostración proporciona certeza absoluta y que es, por tanto, la autoridad absoluta para establecer la validez de una conjetura. Sin embargo, la certeza absoluta no existe en la investigación matemática, y la convicción personal depende habitualmente de una combinación de intuición, verificación cuasi-empírica y la existencia de una demostración lógica, no necesariamente rigurosa. Parece que la razonabilidad de los resultados disfruta a menudo de prioridad frente a la existencia de una demostración completamente rigurosa. Además, los intentos de construir demostraciones rigurosamente completas dan lugar a desarrollos tan largos y complicados que una revisión evaluadora se hace imposible y la probabilidad de errores crece al mismo tiempo muy rápidamente.

Cuando investigan la validez de una conjetura desconocida, los matemáticos no buscan sólo la demostración, sino que intentan construir contraejemplos al mismo tiempo, mediante pruebas cuasiempíricas, ya que estas pueden sacar a la luz contradicciones ocultas, errores o supuestos no explícitos. Consecuentemente, la certeza personal también depende de la continua ausencia de contraejemplos de cara a la evaluación cuasiempírica. Sin embargo estas consideraciones no pueden de ninguna manera quitar importancia a la demostración como método extremadamente útil de verificación, especialmente en el caso de resultados no intuitivos o dudosos.

Aunque es posible alcanzar un alto grado de confianza en la validación de una conjetura por verificación cuasiempírica esto no proporciona generalmente una razón satisfactoria de por qué puede ser cierto. Así, en la mayoría de los casos en los que los resultados son intuitivamente evidentes, la función de la demostración es más bien la de explicación. Sin embargo, como apunta Chevallard (1999), en matemáticas, la justificación predonima tradicionalmente, por medio de la exigencia demostrativa, sobre la función de explicación.

Para Almeida (1996), hacer matemáticas no es sólo identificar lo que es cierto y lo que funciona, sino también analizar por qué es cierto y por qué funciona. Aboga por una enseñanza que combine conocimientos teóricos y prácticos.

Para empezar, este autor se plantea si es lo mismo justificar que probar. Lo primero es convencer a alguien que has entendido una regla y que has entendido por qué funciona. Sin embargo, a la hora de hablar de demostración, distingue aquellas realizadas por profesores y estudiantes en la enseñanza primaria y secundaria de las realizadas por matemáticos profesionales. Las primeras envuelven estados predeductivos, basadas en la analogía con otras experiencias.

Balacheff (1988) señala que hay varios niveles de demostración en la clase. En un primer nivel hay una especie de empirismo ya que la justificación de una proposición se basa en el peso de la evidencia de un cierto número de casos. En el paso siguiente se demuestra la proposición porque se cumple en un caso típico. En un nivel más alto se considera que la demostración está realizada si se utiliza un ejemplo genérico: se aplica a un caso prototípico y se utilizan ciertas estructuras matemáticas para realizar la justificación. Por último, está esta última justificación pero aplicado a un caso abstracto.

La demostración es una herramienta indispensable para sistematizar varios resultados conocidos en un sistema deductivo de axiomas, definiciones y teoremas. Su primer objetivo como medio de razonamiento es organizar lógicamente enunciados individuales no relacionados que de antemano se sabe que son ciertos dentro de un todo coherente y unificado. Además, una demostración puede llevar a encontrar nuevos resultados, aun cuando esta se realice en un proceso deductivo formal.

Para De Villers (1993), es completamente inverosímil que algunos resultados, como las geometrías no euclídeas, pudieran haber sido descubiertos exclusivamente por intuición o métodos cuasiempíricos.

La demostración es una manera única de comunicar resultados matemáticos entre profesionales, entre profesores y alumnos y entre éstos mismos. Sin embargo, está muy desprestigiada por parte de los estudiantes, que no perciben la necesidad de una demostración y no entienden su función.

En opinión de este autor, tradicionalmente, el papel y la función de la demostración en el aula, o bien ha sido completamente ignorado (la razón para darla en clase es que entra en el programa), o bien se ha presentado como medio de obtención de certeza. La explicación debería ser utilizada para presentar la demostración como una actividad significativa para los alumnos. La enseñanza de las matemáticas debería reflejar la naturaleza de las matemáticas y lo que es realmente significativo para los matemáticos en activo.

Consideramos que incluir la demostración en nuestro estudio del campo conceptual del Álgebra Lineal es completamente necesario. Demostrar una proposición es un tipo de situación matemática, que, además, pone en juego gran variedad de conceptos matemáticos, aparte de un correcto uso del lenguaje. En general, la demostración está bastante desprestigiada dentro de la comunidad educativa. Para un alumno, que el profesor justifique en el aula un teorema o proposición significa que esta debe ser memorizada para su reproducción exacta en el examen. Para un profesor, la presencia de una demostración en el aula no tiene un resultado demasido diferente que para un alumno. Sin embargo, a nuestro modo de ver la demostración ha de significar una fase más del quehacer matemático, que no puede ser ignorada en el aula. Pedir al alumno que demuestre o justifique un resultado permite evaluar modos de razonar y de buscar contraejemplos y conjeturas. Por otro lado, distintos niveles de demostración, como los presentados por Balacheff (1988), equivalen a distintos tipos de situaciones matemáticas.

1.4. *Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS)*

1.4.1. Introducción.

La cognición matemática ha sido y es una constante en las ciencias y tecnologías interesadas por el saber humano. Entre los programas de investigación o modelos en torno a esta temática centraremos nuestra atención en el “Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática” (EOS), un enfoque que viene siendo emergente en nuestra área de conocimiento. Lo que estos autores inicialmente[1] designaran como Teoría de las Funciones Semióticas (TFS), al considerar que la "función semiótica" es un constructo clave de dicho enfoque, evoluciona recientemente hacia el nombre de "enfoque ontosemiótico" o expresamente EOS – para referirse a su programa de investigación en didáctica de las matemáticas (Font, 2005)-. Presentaremos brevemente algunos de sus constructos y nos centraremos, en particular, en aquellos que han sido especialmente útiles en nuestra investigación.

En diferentes trabajos, Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994b; Godino, 2002b, Godino, Batanero y Roa, 2005; entre otros) han desarrollado un conjunto de nociones teóricas que configuran un enfoque ontológico y semiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemáticas. Se trata de un punto de vista pragmático, semiótico y antropológico que puede explicar muchos de los fenómenos que se producen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Es pragmático puesto que propone una formulación del significado de los objetos matemáticos que asume los presupuestos de la epistemología pragmática. Hablamos de una perspectiva antropológica, ya que su principal objeto de estudio es el sujeto aprendiendo en instituciones escolares, y las matemáticas son el resultado de una construcción social realizada en diferentes instituciones. Por último, decimos que es semiótico porque atribuye un papel central a los recursos expresivos utilizados en la actividad matemática.

El interés creciente por el uso de nociones semióticas en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es resaltado por Godino (2002b) que apuntan como ejemplo los trabajos de Ernest (1993), Cobb y Bauersfeld (1995), Vile y Lerman (1996), Forman y Sfard (2001), entre otros. En sus propias palabras:

> *Este interés es consecuencia natural del papel esencial que desempeñan los medios de expresión en los procesos de pensamiento, como resaltan Vygotsky (1934), quien considera el significado de la palabra como una unidad de análisis de la actividad psíquica, y Cassirer (1964) para quien "el signo no es una mera envoltura eventual del pensamiento, sino su órgano esencial y necesario". (Godino, 2003b, p.22)*

Sin embargo, consideran necesario un estudio más profundo de las relaciones dialéticas entre pensamiento (ideas matemáticas), lenguaje matemático (sistemas de signos) y situaciones-problemas (en que tiene lugar la actividad matemática) a fin de

[1] Precisamente en 1991, conforme Godino (2003b).

sistematizar una semiótica específica de los procesos de interpretación de los signos matemáticos en los sistemas didácticos. Con todo, consideran que a pesar de la centralidad de esas cuestiones, no se puede hablar de una solución clara para las mismas.

El fin específico de la educación matemática como campo de investigación es el estudio de los factores que condicionan la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Una de las primeras preguntas que debe responder la investigación en educación matemática es cuál es la naturaleza de los objetos matemáticos

Godino y Batanero (1998a) utilizan como base de estudio los siguientes supuestos epistemológicos y cognitivos:

-Las matemáticas constituyen un quehacer humano, producido como respuesta a cierta clase de situaciones problemáticas del mundo real, social o de la propia matemática.

-Las matemáticas crean un lenguaje simbólico en el que se expresan las situaciones problemas y sus soluciones.

-La actividad matemática se propone, entre otros fines, la construcción de un sistema conceptual lógicamente organizado.

En 1994b, Godino y Batanero proponen un análisis de la noción de significado desde un punto de vista didáctico, como un apoyo en la comprensión de las relaciones entre las distintas teorías en el área de Didáctica de las Matemáticas, y particularmente para los estudios sobre la evaluación de los conocimientos. Para este análisis, el modelo teórico desarrollado se basa en los supuestos pragmáticos del significado de los objetos matemáticos desde una triple perspectiva: institucional, personal y temporal.

En ese modelo se observa que uno de los intereses de la Didáctica de las Matemáticas es *"determinar el significado que los alumnos atribuyen a los términos y símbolos matemáticos, a los conceptos y proposiciones, así como la construcción de estos significados como consecuencia de la instrucción"* (pp. 326). Esta preocupación se refleja en los trabajos de importantes teóricos e investigadores y, en ese sentido resaltan, entre otros, a Brousseau (1980, 1986) y Balacheff (1990) que suscitan cuestiones centrales para la Didáctica de la Matemática y, Sierpinska (1990) y Dummett (1991) que relacionan significado y comprensión.[2] A pesar de la relevancia atribuida a esa temática "no se encuentra en la literatura de la especialidad un análisis explícito de qué sea el significado de las nociones matemáticas", y esa carencia justifica la sistematización de un estu-

[2] Para más información sobre los estudios de los teóricos mencionados y otros más, consultar Godino y Batanero (1994b) y Godino (2003b).

dio, como el que realizan, en el sentido de hacer más explicita la idea de significado en lo que respecta a los términos y conceptos matemáticos, teniendo en cuenta toda una base epistemológica de los mismos.

1.4.2. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos.

Godino y Batanero (1994b) toman como punto de partida nociones de la teoría antropológica de Chevallard (1989, 1992), específicamente las de objeto y de praxema. Para Chevallard (1992), praxema corresponde a los "*objetos materiales ligados a las prácticas*" y usa esta noción para definir el objeto como un "*emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro de lo oral, registro de lo gestual y, registro de lo escrito*" (Chevallard, 1992, pp. 80)

Esas nociones forman parte de la base de los constructos del EOS, pero los autores de este enfoque proponen hacerlas más operativas y refinadas –en consonancia con los supuestos pragmáticos de las teorías de significado- mostrando, además, sus semejanzas, diferencias y relaciones con otras herramientas conceptuales, como por ejemplo, las de concepción y significado; consideran necesario precisar las nociones de práctica y de objeto, así como un uso técnico de la noción de significado que sea útil en los estudios psicológicos y didácticos (Godino y Batanero, 1994b); se interesan por reconocer explícitamente, en el componente discursivo, los conceptos, proposiciones y argumentaciones, así como el lenguaje, objetos ostensivos en la terminología de la teoría antropológica (Godino, 2002b).

Así, Godino y Batanero (1994b) distinguen, en el conocimiento matemático, dos dimensiones interdependientes: una personal o subjetiva y otra institucional u objetiva. Esto aconseja conceptuar los objetos y su significado con un carácter esencialmente relativista, lo cual permitirá apreciar mejor las adaptaciones e influencias mutuas que sufren los objetos matemáticos al ser transmitidos entre personas e instituciones. Para ello estos autores, definen una serie de nociones que constituyen la base para interpretar estas dimensiones:

DEFINICIÓN 1: *Una situación-problema es cualquier tipo de circunstancia que precisa y pone en juego actividades de matematización.*

Como ejemplos de estas actividades podemos citar: construir o buscar soluciones que no son accesible inmediatamente o producir nuevas expresiones y enunciados significativos mediante manipulaciones simbólicas (Godino y Batanero 1998a).

Las situaciones-problema no aparecen aisladas, independientes unas de otras, sino que constituyen clases interrelacionadas, compartiendo soluciones y representaciones similares. Estas clases de situaciones-problema están relacionadas con las de campos de problemas o campos conceptuales, que analizamos previamente.

Las situaciones-problema matemáticas son las promotoras y contextualizadoras de la actividad matemática, y junto con las acciones (algoritmos, operaciones, procedimientos) constituyen el componente práctico de esta disciplina, la acción dirigida a un fin.

En este trabajo fijaremos nuestra atención en el campo de problemas y actividades de las que emergen los objetos matemáticos "matrices y determinantes". Planteamos tres ejemplos de estos problemas:

1- Obtener las matrices A y B que verifiquen el sistema

$$\begin{cases} 2A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A-3B=\begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

2- Dada una matriz A, ¿existe una matriz B tal que el producto AB o bien el BA sea una matriz de una sola fila?

3- Sin desarrollar los determinantes, demostrar la identidad:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Otros problemas que resuelven las matrices y determinantes son todos aquellos que se refieren a la discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales, el cálculo de posiciones relativas de rectas y planos en el espacio y el cálculo del producto vectorial y mixto.

1.4.2.1. La noción de práctica.

Una de las primeras nociones introducidas en el marco del EOS fue la de *práctica* y el desarrollo de la misma tuvo como meta principal caracterizar las "actividades de matematización".

> DEFINICIÓN 2: *Llamamos práctica a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas.*

En las prácticas matemáticas intervienen objetos materiales o abstractos, los cuales pueden estar representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual.

En general, mas bien que en las prácticas particulares para resolver un problema específico, estamos interesados en los tipos de prácticas, esto es, en los invariantes operatorios mostrados por las personas en sus intentos por solucionar las situaciones-problema. Estos invariantes se llamarán *prácticas prototípicas*. En problemas semejantes al Problema 1 una práctica habitual consiste en multiplicar una de las ecuaciones por un número adecuado para que al sumarlas desaparezca una incógnita. En este caso multiplicaríamos la primera ecuación por 3.

Generalmente, para cada campo de problemas y para cada persona podemos asociar un sistema de prácticas prototípicas o características.

Font (2005) observa que en la definición de práctica dada se pueden considerar tres intenciones diferentes, las cuales permiten considerar tres tipos de prácticas: a) *operativas* o *actuativas* - toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos; b) *discursivas* o *comunicativas* - comunicar a otros la solución, validar la solución; c) *regulativas* o *normativas* - generalizarla a otros contextos y problemas.

1.4.2.2. La noción de institución.

Por regla general las situaciones-problema y sus soluciones son compartidas socialmente, esto es, están ligadas a situaciones en las cuales las situaciones-problema se tratan con una finalidad específica.

> DEFINICIÓN 3: *Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo de la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen.*

Llamaremos institución matemática a las personas que en el seno de la sociedad están comprometidas en la resolución de nuevos problemas. Son, por tanto, los productores del “saber matemático”.

> DEFINICIÓN 4: *El sistema de prácticas institucionales, asociadas a un campo de problemas está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas y compartidas en el seno de la institución. Su carácter social indica que son observables.*

Los sistemas de prácticas que una institución considera apropiados para resolver un tipo de tareas son denominadas por Chevallard, Bosch y Gascón (1997) una *praxeología matemática*, noción que podemos asimilar con la que Godino y Batanero (1994b) denominan significado institucional de un objeto matemático. Según Arrieche (2002), la interpretación de las praxeologías como significados de los objetos matemáticos (teorías, contenidos u organizaciones matemáticas) supone la adopción de una epistemología de tipo pragmatista y relativista.

Sea T un tipo de tareas dado. Una praxeología relativa a T requiere una manera de realizar las tareas t de T (Chevallard, 1999). A una determinada manera de hacer se le denomina técnica, la cual sólo tiene éxito con un determinado tipo de tareas de T y no es necesariamente de naturaleza algorítmica. Sin embargo en una institución dada y a propósito de un tipo de tareas *T* dado, existe en general una sola técnica o un pequeño grupo de técnicas institucionalmente reconocidas.

Las dificultades surgen cuando no se dispone de una técnica para realizar la tarea pedida, encontrándonos entonces con una situación problemática. Se pasa así de la petición de realizar una tarea *t* a la necesidad de elaborar una técnica y, más concretamente, toda una praxeología relativa a las tareas de tipo *T*. En un gran número de casos una persona o colectivo confrontado a una dificultad de este tipo responde ignorando esta problematicidad, es decir, no realizando la tarea en cuestión.

1.4.2.3. La noción de objeto.

Los objetos matemáticos son entidades abstractas que emergen progresivamente a partir de los sistemas de prácticas socialmente compartidas, ligadas a las actividades de resolución de determinados campos de problemas. Las definiciones y enunciados constituyen manifestaciones lingüísticas que en la cultura matemática suelen tomarse como elementos que determinan esta clase de objetos, describiendo el procedimiento constructivo del mismo o sus propiedades características. Puesto que las prácticas pueden variar de una institución a otra, debemos atribuir al objeto una relatividad respecto de las instituciones. Por ejemplo, en el caso que nos ocupa, esta relatividad se puede interpretar en que un determinante no es lo mismo para un estudiante universitario, que lo consideraría un tipo de aplicación, que para uno de secundaria, que lo vería como un número asociado a una matriz.

Gascón (1998) habla de un estadio anterior a los objetos matemáticos. Llama paracientíficos a objetos que son utilizados como herramientas transparentes, no cuestionables y que sólo aparecen en el discurso científico normal como útiles para describir otros objetos. Muchos conceptos paracientíficos pasan a ser científicos. Por ejemplo, los objetos "número real" o "función" fueron paramatemáticos, antes de ser objetos de estudio en sí mismos y convertirse en objetos matemáticos.

Recurriendo a la máxima pragmática de que un objeto institucional implica la generación de una regla de comportamiento compartida por toda la institución, es definida la siguiente noción:

DEFINICIÓN 5: *Un objeto institucional es un emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas. Esta emergencia es progresiva a lo largo del tiempo.*

Hay que destacar que de un campo de problemas pueden emerger diversos objetos que, como consecuencia, están mutuamente relacionados. Por tanto, con la definición de objeto institucional dada por Godino y Batanero (1994b) se postula la existencia (cultural) de distintos objetos, según la institución de referencia, en situaciones donde la concepción absolutista de las matemáticas ve uno solo.

Así, el objeto matriz nos parece único, aunque cambia y se amplía a lo largo del tiempo. De hecho no es el mismo objeto para los investigadores del siglo XIX, cuando surge como una notación más sencilla para estudiar sistemas de ecuaciones lineales y transformaciones lineales, que en los centros de Secundaria actuales que, tras estudiar matrices y determinantes, se utilizan para resolver sistemas de ecuaciones.

El carácter progresivo de la construcción de los objetos en la ciencia tiene su paralelismo en el aprendizaje del sujeto y en la invención de nuevas ideas matemáticas (de ahí la importancia de estudiar un desarrollo histórico).

DEFINICIÓN 6: *Un objeto personal es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas.*

1.4.2.4. La noción de significado.

La emergencia del objeto personal es progresiva a lo largo de la historia del sujeto, como consecuencia de la experiencia y el aprendizaje. Estos objetos son los constituyentes del conocimiento subjetivo (Ernest, 1991, citado por Godino y Batanero, 1994b). Son nombrados y descritos mediante prácticas que suelen considerarse como definiciones del objeto, aunque Godino y Batanero (1998a) consideran que el significado de los objetos matemáticos debe estar referido a la acción (interiorizada o no) que realiza un sujeto en relación a dichos objetos. Además, se resalta la necesidad de diferenciar la dimensión personal e institucional para el significado.

DEFINICIÓN 7: *El significado institucional de un objeto es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge en un momento dado. Se trata de un constructo relativo a la institución y dependiente estocásticamente del tiempo.*

Esta noción de significado permite introducir en la problemática epistemológica y didáctica el estudio de la estructura de los sistemas de prácticas sociales de los que emergen los objetos matemáticos, así como su evolución temporal y dependencia institucional.

Godino (2003b) distingue cuatro tipos de significados institucionales:

Cuando un profesor planifica un proceso de instrucción sobre un objeto matemático comienza por delimitar lo que es para las instituciones matemáticas y didácticas, acudiendo a textos matemáticos y a orientaciones curriculares. Con ello construirá un sistema de prácticas que designamos como *significado institucional de referencia* del objeto.

A partir de este significado el profesor selecciona la parte específica que va a proponer a sus estudiantes durante el proceso de estudio. Se denomina *significado institucional pretendido* al sistema de prácticas que se planifican sobre un objeto matemático para un cierto proceso instruccional.

El *significado implementado* es el sistema de prácticas que tienen lugar en la clase de matemáticas, las cuales servirán de referencia inmediata para el estudio de los alumnos y las evaluaciones de los aprendizajes. O sea, no todo lo que se planifica se pone exactamente en práctica, de ahí que posibles "cambios" en lo pretendido, derivados de las interacciones entre los sujetos en clase, son susceptibles de ocurrir.

En el proceso de evaluación el profesor selecciona una colección de tareas que incluye en las pruebas planteadas al alumnado. Esto se designa como *significado institucional evaluado.*

DEFINICIÓN 8: *El significado personal de un objeto es el sistema de prácticas personales de una persona para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto en un momento dado. Depende, por tanto, del sujeto y del tiempo estocásticamente.*

Desde el punto de vista del estudiante diferenciamos tipos de significados personales: 1) el *significado personal global* que corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el alumno, relativas a un objeto matemático; 2) *el declarado* que da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las evaluaciones propuestas (en conformidad o no con el punto de vista institucional); y 3) *el logrado* que corresponde a las prácticas manifestadas en conformidad con la pauta institucional establecida.[3] (Godino, 2003b, Font, 2005).

Una parte del significado es observable, aunque no lo son directamente las prácticas constituidas por acciones interiorizadas.

Una institución de una importancia particular para la didáctica es la clase de matemáticas. Dentro de ella un aspecto importante es la evaluación del aprendizaje del alumno por parte del profesor en la que es preciso confrontar el significado que se trata de transmitir con el efectivamente adquirido. Aparece así la siguiente definición:

> DEFINICIÓN 9: *El significado de un objeto para un sujeto desde el punto de vista de la institución es el subsistema de prácticas personales asociadas a un campo de problemas que son consideradas como adecuadas y características para resolver dichos problemas.*

Diríamos que un sujeto comprende el significado del objeto si fuese capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos y usarlo en toda la variedad de situaciones problemáticas dentro de la institución correspondiente.

En la siguiente figura se indican los distintos tipos de significados personales e institucionales puestos en juego en el diseño, implementación y evaluación de los procesos de instrucción matemática (Godino, Bencomo, Font y Wilhemi, 2006).

---

[3] "Es importante remarcar que en el significado global pueden influir otras materias además de las matemáticas. Por ejemplo, aunque el significado pretendido de la derivada en una institución escolar no contemple la notación incremental y la diferencial, el significado personal declarado de los alumnos suele incorporar prácticas en las que dicha notación se utiliza (Inglada y Font 2003). Este hecho se produce aún en el caso de que no se haya utilizado esta notación en la clase de matemáticas ya que el cociente incremental y el concepto de diferencial se utiliza habitualmente en la clase de física, con lo que ciertas prácticas que utilizan la notación incremental y la diferencial forma parte del significado global del alumno debido al proceso de estudio que han seguido en la clase de física" (Font y Ramos, 2005b, pp. 314)

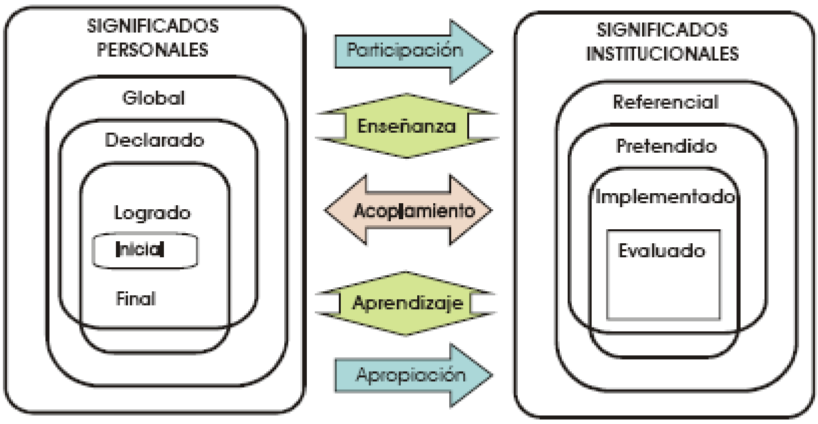


Figura 1.4.2.4.1: Tipos de significados personales e institucionales

En la parte central se indican las relaciones dialécticas entre enseñanza y aprendizaje, que supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales.

En el EOS se considera que, para poder evaluar los resultados de un proceso de instrucción realmente implementado (*significado implementado*) o bien planificado en un libro de texto (*significado pretendido*), es necesario establecer el significado de referencia que sirva de comparación. En el caso que nos ocupa, la RP, será necesario establecer una "Configuración Epistémica" (CE a partir de ahora) de referencia para poder valorar la resolución de los alumnos, es decir, redes de objetos institucionales. Este constructo también nos servirá para contrastarlo con la "*Configuración cognitiva*" (CC a partir de hora) de los estudiantes, es decir, redes de objetos personales, y determinar posibles dificultades y conflictos semióticos en la construcción de significados personales.

Respecto a los significados personales, se proponen tres tipos: global, cuando corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático; declarado, cuando da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas; y logrado, que corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida.

Los posicionamientos pragmáticos del EOS llevan a entender, de entrada, la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental (se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas).

El problema de la evaluación de los conocimientos matemáticos es también fuente de preocupación de los autores. Una de las cuestiones que se plantea en este ámbito es cómo evaluar aquello que no conocemos. Así que, una de las finalidades del EOS es proporcionar criterios para la elaboración de una teoría de la “evaluación del conocimiento matemático”.

Entendemos por análisis sistémico de un proceso de instrucción matemática la identificación de los componentes del contenido matemático pretendido, su secuenciación y su comparación con el significado de referencia. Este análisis lo consideramos una parte del análisis de la cognición individual (análisis semiótico). Nos permitirá describir el significado institucional pretendido y el implementado del tema estudiado, así como la distribución temporal de sus distintos elementos.

1.4.3. Tipos de objetos y de facetas o dimensiones del conocimiento matemático .

Según Godino (2002b), en el trabajo matemático, los símbolos (significantes) remiten o están en lugar de las entidades conceptuales (significados). El punto crucial en los procesos de instrucción no está en el dominio de la sintaxis del lenguaje simbólico matemático, sino en la comprensión de su semántica, es decir, en la naturaleza de los propios conceptos y proposiciones matemáticas y su relación con los contextos y situaciones-problemas de cuya resolución provienen.

El significado se concibe como el contenido asignado a una expresión (función semiótica en el sentido de Hjemslev). No tiene por qué ser necesariamente una entidad mental, aunque también puede serlo; es sencillamente a lo cual se refiere un sujeto en un momento y circunstancias dadas.

Godino y Batanero (1994b) presentan una síntesis de distintas aportaciones realizadas sobre la cuestión del significado. De acuerdo con Kutschera (1979, citado por Godino y Batanero, 1994b) las teorías de significado pueden presentarse en dos categorías: realistas y pragmáticas. Las realistas conciben el significado como una relación convencional entre signos y entidades concretas o ideales que existen independientemente de los signos lingüísticos. Intentan expresar la esencia del significado resolviéndolo en sus componentes principales. Por tanto, las expresiones lingüísticas tienen una relación de atribución con ciertas entidades. En lo que respecta a las teorías pragmáticas u operacionales, el significado de las expresiones lingüísticas depende del contexto en el que se usan y niegan la posibilidad de observación científica, empírica o intersubjetiva de las entidades abstractas. Esta tendencia estudia las palabras en acción y se interesa menos por qué es el significado que por cómo opera.

El análisis del significado de los objetos matemáticos está estrechamente relacionado con el problema de las representaciones externas e internas de dichos objetos. El término representación se usa con diferentes sentidos. Por una parte, es considerada como un objeto, bien mental o real; pero también la representación es la relación o correspondencia que se establece entre dos objetos, de manera que uno de ellos se pone en lugar del otro. Para Font, Godino y D'Amore (2007), hablar de representación equivale a hablar de conocimiento, significado, comprensión y modelización.

La representación se caracteriza mediante una correspondencia abstracta entre dos entidades que son puestas en alguna relación referencial una con otra, por un actor o un observador. El uso de los términos "representación" y "significación" se realiza en circunstacias en las cuales un ente, frecuentemente de tipo lingüístico, se pone en relación con otro.

En un estudio sobre los objetos matemáticos, las representaciones de estos objetos son fundamentales para analizar su significado. El lenguaje es el nexo entre el objeto matemático y la representación que se tiene de él.

Podemos suponer la existencia de constructos psicológicos en la mente del individuo. Estas representaciones internas se organizan en redes más o menos conectadas. La comprensión o el aprendizaje significativo dependen de la extensión de estas redes. En estas redes de representaciones internas se ubican las concepciones del estudiante como expresión interna de aquello que evoca un concepto matemático. En la mente del estudiante el concepto evocado puede tener distintas representaciones que pueden corresponder, parcialmente, a las representaciones externas (simbólicas, gráficas) que este concepto tiene en el mundo físico.

Desde la posición de la semántica realista, las nociones y estructuras matemáticas tienen una existencia real, independiente de la humanidad, en algún dominio ideal. Esta concepción implica una visión absolutista del conocimiento, en el sentido de que éste es considerado como un sistema de verdades seguras e inmutables. Sin embargo, como ya hemos visto, los objetos matemáticos son relativos respecto a las instituciones de referencia, lo cual hace difícil que pueda considerarse el conocimiento matemático como algo inmutable.

Desde el punto de vista de Godino (2003b), los supuestos ontológicos del constructivismo social como filosofía de las matemáticas llevan a la adopción de las teorías pragmáticas del significado. Los objetos deben ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo.

Para desarrollar su teoría de funciones semióticas, Godino (2003b) utiliza la teoría del lenguaje de Hjelmslev (1943), por considerarla de utilidad para describir la actividad matemática y los procesos cognitivos implicados, tanto en la producción como en la comunicación de conocimientos. La descripción y el análisis de los procesos de estudio matemático requieren transcribir de forma textual las manifestaciones lingüísticas de los sujetos participantes, y los acontecimientos que tienen lugar en la interacción didáctica. En definitiva, el análisis se aplicará a un texto que registra la actividad matemática desarrollada por los sujetos participantes.

Una noción clave en la teoría del lenguaje de Hjelmslev es la de función, que se concibe como la dependencia entre el texto y sus componentes y entre estos dos componentes entre sí. Se trata, por tanto, de las correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un antecedente (expresión, significante, representante) y un consecuente (contenido o significado, representado), establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. Estos códigos suelen ser reglas que informan a los sujetos implicados sobre los términos que se deben poner en correspondencia en las circunstancias fijadas.

Entre los posibles tipos de dependencias que se pueden identificar entre partes de un texto destacan aquellas en que una parte designa alguna otra: la primera (plano de expresión) funciona o se pone en representación de la segunda (plano del contenido), esto es, señala hacia un contenido que hay fuera de la expresión. Esta función es la que designa Hjelmslev como función de signo y Eco (1979, citado por Godino, 2003b) como función semiótica, la cual nos va a permitir identificar diversos tipos de significados elementales, teniendo en cuenta la naturaleza diversa del contenido de la función semiótica.

Con frecuencia se usa la palabra "signo" para designar especialmente la forma de la expresión; pero parece más adecuado usar dicha palabra para designar la unidad que consta de forma de contenido y forma de expresión. El signo no supone mera correspondencia entre expresión y contenido, sino que se debe hacer una interpretación. Las representaciones matemáticas no se pueden entender de manera aislada. Dentro de cada sistema representacional se incluyen las convenciones que lo configuran así como las relaciones con otros objetos y sistemas matemáticos.

Los sistemas de representaciones externas comprenden los sistemas simbólicos convencionales de las matemáticas, tales como la notación formal algebraica. Se considera que una representación es un signo o una configuración de signos, caracteres u objetos que pueden ponerse en lugar de algo distinto de él mismo. El objeto representado puede variar según el contexto o el uso de la representación. En el caso del Álgebra Lineal el sistema de representación externo es principalmente notacional y formal.

Se consideran representaciones internas los constructos de simbolización personal de los estudiantes. Se introducen como una herramienta teórica para caracterizar las cogniciones complejas que pueden elaborar los estudiantes sobre las representaciones externas. La interacción entre representaciones externas e internas es fundamental para la enseñanza y el aprendizaje.

Entre los fines fundamentales de la educación matemática están los objetivos representacionales (Godino, 2003b, pag 55): desarrollo de sistemas internos eficientes de representación en los estudiantes que correspondan de manera coherente, e interactúen bien, con los externos, convencionalmente establecidos de las matemáticas.

Godino (2003b) también tiene en cuenta la noción de contexto para describir su modelo semiótico. El contexto se concibe como el conjunto de factores extra e intra lingüísticos que soportan y determinan la actividad matemática.

Godino propone como unidad de análisis del conocimiento matemático (tanto en su dimensión institucional como personal) el *sistema de prácticas operativas y discursivas ligadas a un campo de problemas,* tratando de operativizar el constructo “relación con el objeto”. Conocer en matemáticas quiere decir conocer los sistemas de prácticas, por lo que supone conocer los diversos objetos emergentes de los tipos o subsistemas de prácticas, así como su estructura.

Uno de los ejes principales de la antropología cognitiva es la distinción entre el dominio de lo personal y de lo institucional, por lo que se diferencia entre objeto institucional y personal. De todas formas, Godino (2002b) señala que la focalización en los conocimientos institucionales lleva a prescindir dentro del enfoque antropológico de los fenómenos relacionados con el aprendizaje del sujeto y del análisis de las interacciones discursivas en el seno de la clase.

Godino (2003b) concibe el significado como el contenido asignado a una expresión (función semiótica). En ciertos actos comunicativos nos referimos a “sistema de prácticas” (significado sistémico), mientras que en otros nos referimos a elementos constitutivos de tales sistemas (significado elemental). La noción de significado sistémico propuesta por Godino está inspirada en las ideas de Wittgenstein (1953) sobre significado y comprensión.

Para efectos de análisis de protocolos, respuestas a tareas u otro tipo de datos en una investigación, interesa descomponer el significado global en entidades más elementales. Además, no sólo las entidades conceptuales requieren interpretación en los procesos comunicativos puestos en juego en la educación matemática, sino que también los propios medios expresivos y las situaciones problemáticas desencadenan interpretaciones por parte de los destinatarios de los mensajes en un momento y circunstancias dadas.

Godino (2002b) describe un modelo ontológico-semiótico que trata de aportar herramientas teóricas para analizar conjuntamente el pensamiento matemático, los ostensivos que le acompañan, las situaciones y los factores que condicionan su desarrollo.

Al comparar este modelo con otros modelos teóricos un punto diferenciador será la descomposición analítica propuesta para los conocimientos, tanto personales como institucionales, que amplían divisiones clásicas, como la del conocimiento procedimental y conceptual.

En la descripción de la actividad matemática nos referimos a muchos y diversos objetos (Godino 2002b, pag 241). Este autor considera como objeto o entidad matemática "*todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual hacerse referencia (Blumer, 1982, pp.8)" cuando hacemos, comunicamos o aprendemos matemáticas*” (pp.241). Distingue 6 tipos de objetos o entidades primarias:

(1) ***Lenguaje*** *(términos, expresiones, notaciones, gráficos). En un texto viene dados en forma escrita o gráfica pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual). Mediante el lenguaje (ordinario y especifico matemático) se describen otros objetos no lingüísticos;*

(2) ***Situaciones*** *(problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios…); son las tareas que inducen a la actividad matemática;*

(3) ***Procedimientos*** *del sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo..)*

(4) ***Conceptos*[4]*, dados mediante definiciones o descripciones (número, punto, recta, función…);***

(5) ***Propiedades*** *o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones;*

(6) ***Argumentaciones*** *que se usan para validar y explicar las proposiciones (sean deductivas o de otro tipo).* (pp.242)

Estos seis tipos de objetos se articulan formando *configuraciones epistémicas* (D'Amore, Font, Godino, 2007):

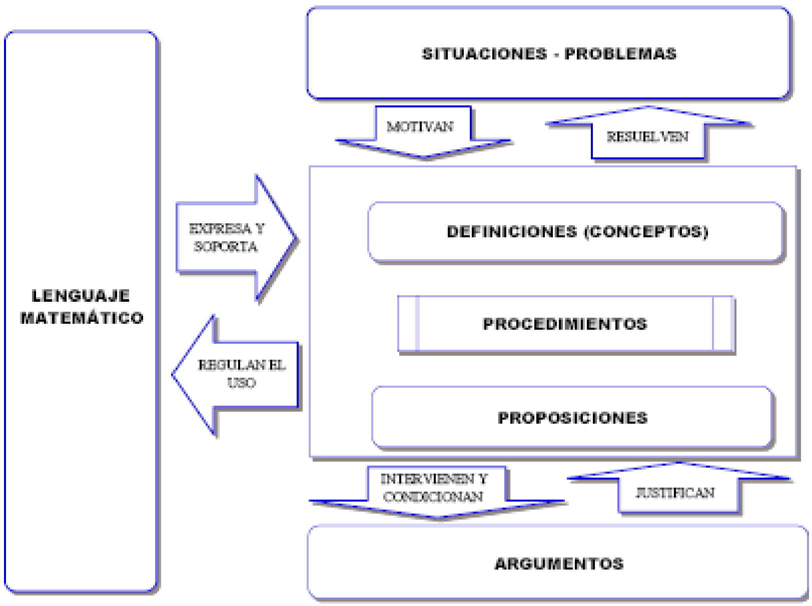


Figura 1.4.3.2: Componentes y relaciones en una configuración epistémica

La herramienta configuración epistémica nos permite ver la estructura de los objetos que posibilitan la práctica matemática.

Estos seis tipos de objetos son los constituyentes primarios de otros más complejos, como los sistemas conceptuales.

Consideremos, por ejemplo, el caso del Álgebra Lineal. Encontramos, en el trabajo con esta rama de las matemáticas, diferentes tipos de objetos que describimos a continuación:

[4] "Los conceptos o propiedades son interpretados aquí como propone Wittgenstein, como "reglas gramaticales sobre el uso de símbolos o expresiones" para describir las situaciones y las acciones que realizamos ante dichas situaciones (Baker y Hacker 1985. pp.285). Tales reglas cambian según la fenomenología, los juegos de lenguaje, las formas de vida, las instituciones. Otro uso habitual de "conceptos" es como sistema heterogéneo de objetos (situaciones, invariantes operatorios, representaciones) que se puede sustituir con ventaja por la noción de praxeología". (Godino, 2002b, pp.242)

Las situaciones algebraicas son problemas o aplicaciones a partir de las cuales emergen los conceptos del Álgebra Lineal. Un ejemplo es el siguiente (Godino, Batanero y Roa, 2005, presentan un ejemplo similar con un problema combinatorio):

> *En un taller de joyería se fabrican collares con 50, 75 y 85 perlas y para ello se utilizan en su totalidad 17500 perlas y 240 cierres.*
>
> *a) ¿Cuántos collares se han de fabricar si se desean tantos collares de tamaño mediano como la media aritmética del número de collares grandes y pequeños?*
>
> *b) Sin tener en cuenta la condición del apartado anterior, ¿es posible fabricar el mismo número de collares de cada tamaño?*

Esta situación es un ejemplo típico de un "problema de sistemas de ecuaciones lineales", en donde se ha de plantear un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Para resolver este problema o describirlo a otra persona necesitamos usar términos, expresiones o notaciones. Así hemos de manejar palabras como *sistema, ecuación lineal, incógnita, media aritmética, matriz,* etc; y ciertas notaciones simbólicas como *x, y, z* (suponiendo que a las incógnitas las llamamos con estas letras) o la notación matricial. Estas notaciones nos permitirán operar con las cantidades y variables representadas, por lo que no sólo tienen una función representacional, sino también instrumental.

Para resolver este problema se pueden utilizar diversas operaciones, técnicas de cálculo, algoritmos o procedimientos. Las acciones que esperamos a priori que realicen los estudiantes de secundaria con instrucción para resolver este problema serían las siguientes:

- *Traducción* del enunciado del problema a un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.
- *Disposición* de las incógnitas para escribir posteriormente el sistema en forma matricial, es decir, las incógnitas ordenadas en un lado de la igualdad y los términos independientes en el otro lado.
- *Escritura* del sistema en forma matricial.
- *Aplicación* del método de Gauss o Cramer.
- *Realización* de las operaciones de cálculo de las incógnitas.

Esta sería una de las formas posibles de resolver el problema y, aquellos alumnos sin instrucción previa sobre el tema o que hayan olvidado los métodos de Gauss o Cramer, podrían aplicar un razonamiento similar al utilizado en cursos anteriores, como puede ser el método de sustitución.

El sujeto, al resolver el problema, no sólo realiza acciones sobre los símbolos u objetos materiales con los que opera, sino que en dicha actividad necesita evocar diferentes objetos matemáticos mediante sus definiciones o descripciones. Ejemplos de conceptos utilizados en la resolución de este problema son: ecuación, incógnita, sistemas de ecuaciones, ecuación lineal, matriz, matriz de un sistema, matriz ampliada, filas de una matriz, combinación lineal, vectores independientes.

Asimismo es preciso evocar o utilizar propiedades que suelen darse como enunciados o proposiciones. Estos atributos se refieren a condiciones de realización de las acciones, a características específicas de las situaciones y relaciones entre objetos. Por ejemplo, el sistema puede ser compatible o incompatible, determinado o indeterminado.

Finalmente todas estas acciones y objetos se ligan entre sí mediante argumentos o razonamientos que se usan para comprobar las soluciones de los problemas o explicar a otros la solución. Por ejemplo, un alumno podría sustituir la solución obtenida en el sistema de ecuaciones para validarla.

Además, debido a la diversidad de posibles tareas de evaluación para cada objeto matemático, será fundamental el análisis de las variables de dichas tareas. Éste proporcionará un criterio en la selección de los ítems para la construcción de los instrumentos de evaluación.

Este modelo ontológico se completa con la consideración de cinco facetas o dimensiones duales que, junto con la noción de función semiótica como entidad relacional entre los distintos tipos de entidades, permiten describir y relacionar una variedad de nociones cognitivas propuestas desde diversas teorías. Actuando en parejas se complementan de forma dialéctica y, con otras entidades (por ejemplo, objetos matemáticos), enriquecen el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática. En otras palabras, esas facetas son consecuencia de una serie de procesos interpretativos involucrando los objetos matemáticos y sus elementos de significado, dando lugar a distintas "versiones" o “miradas” de los mismos. (Godino, 2002b, p. 243-247; Font, 2005, Godino, Batanero, Roa, 2005):

- *Dualidad “personal / institucional”*. Una misma expresión puede referirse a un objeto personal o institucional dependiendo del contexto. Por ejemplo, cuando un libro de texto es usado por un profesor los objetos incluidos en él tendrán la consideración de institucionales. Sin embargo, las respuestas de los alumnos a los ejercicios propuestos serán objetos personales. Esta dualidad permite caracterizar el aprendizaje como "acoplamiento progresivo" entre significados personales e institucionales y explicar las dificultades y obstáculos en términos de conflictos semióticos y de la complejidad de los objetos matemáticos.

- *Dualidad "ostensivo / no ostensivo"*. Se considera el lenguaje como la faceta ostensiva de los objetos matemáticos, ya que es el medio por el cual se expresan los objetos no ostensivos (o no perceptibles), siendo también instrumento para su constitución y desarrollo. Las entidades lingüísticas también tienen una faceta no ostensiva puesto que el sujeto puede pensar (sin mostrarlo exteriormente) en una palabra, en una notación o en cualquier otro recurso expresivo.
- *Dualidad "elemental / sistémico"*. Algunos conceptos se ponen en juego de manera transparente, como si se tratara de entidades unitarias o elementales. Otros, por el contrario, se consideran entidades compuestas o sistémicas, con una cierta organización o estructura. Cuando nos interrogamos por cualquier objeto aparece un sistema en el que de nuevo se ponen en juego los restantes tipos de objetos y la trama de relaciones entre ellos.
- *Dualidad "ejemplar / tipo"*. En el análisis de la actividad matemática debemos precisar en cada circunstancia si nos referimos a un objeto concreto (algo que se pone en juego por sí mismo), o a dicho objeto como representante de una clase. Distinguimos así entre objetos concretos y abstractos (o extensivos e intensivos). La consideración de un objeto como concreto o abstracto depende en cada momento del juego de lenguaje en que se usa.
- *Dualidad "expresión / contenido" o "significante / significado"*. La actividad matemática es esencialmente relacional. Hjemslev (1943, citado por Godino, 2002b) llama función semiótica a la dependencia entre el texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí. Es una entidad relacional entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido o significado), establecidas por un sujeto (persona o institución).

Los tipos de objetos descritos, sintetizados en la siguiente figura (Font, Godino, D'Amore, 2007, Font, 2005), constituyen una respuesta operativa al problema ontológico de la representación del conocimiento matemático.

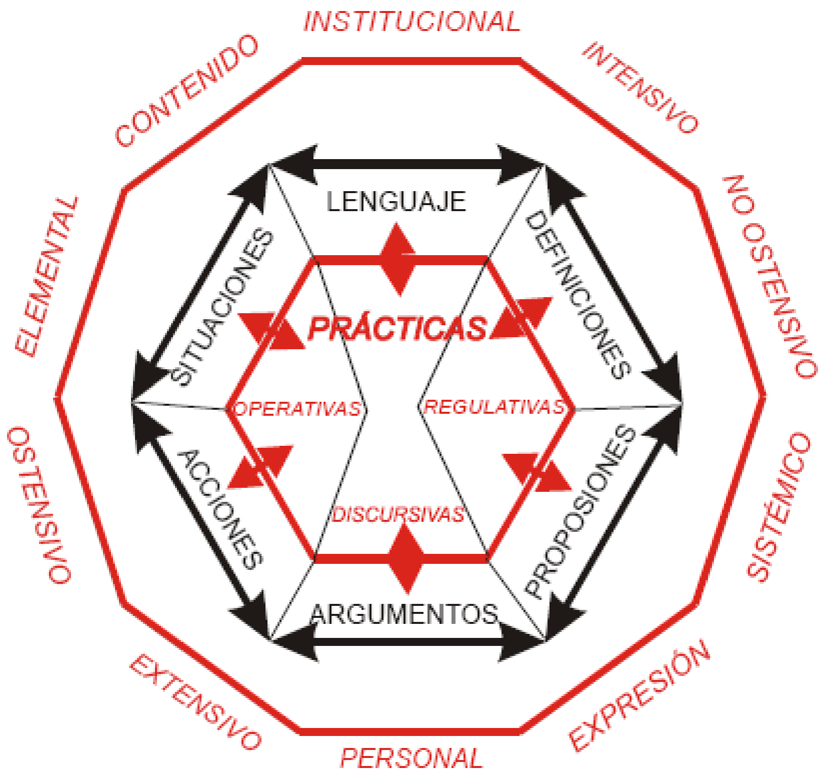


Figura 1.4.3.3: Ontosemiótica del conocimiento matemático

Para analizar los fenómenos ligados a la comprensión de los objetos matemáticos es preciso elaborar respuestas a dos cuestiones básicas: qué comprender, y cómo lograr la comprensión. En los procesos de evaluación del aprendizaje el término "comprensión" debe tener en cuenta la institución escolar, en la que el significado de los objetos se fija culturalmente. Así, se define la comprensión personal de un concepto como la construcción o apropiación del significado institucional de dicho objeto. Por ello, la comprensión deja de ser un proceso meramente mental y se convierte en un proceso social e interactivo.

De esta forma, el profesor que evalúa la comprensión de sus alumnos debe relativizarla al contenido presentado en clase. La dependencia entre los significados personales e institucionales se observa porque el significado que el sujeto debe apropiarse depende de las informaciones y actividades propuestas por el profesor.

Hemos de distinguir entre competencia (saber hacer) y comprensión (saber qué hacer y por qué). Ambos ponen en juego conocimientos, siendo en el primer caso de tipo procedimental, y en el segundo de tipo conceptual y argumentativo. En una situación ideal, y en una institución dada, diremos que un sujeto comprende el significado de un objeto si es capaz de reconocer los problemas, procedimientos, argumentaciones, propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos en toda la variedad de situaciones planteadas por la institución correspondiente. La comprensión alcanzada por un sujeto en un momento dado no será total o nula, sino que abarcará aspectos parciales de los diversos componentes y niveles de abstracción. El sujeto comprenderá las acciones que realiza y el significado de los objetos que maneja si es capaz de utilizar argumentos o razonamientos que le ayuden a validar las soluciones dadas y comunicarlas a los otros.

La noción de función semiótica pretende tener en cuenta la naturaleza esencialmente relacional de la actividad matemática y de los procesos de difusión del conocimiento matemático. Se dice que se establece una función semiótica entre dos entidades (ostensivas o no ostensivas) cuando entre ambas se establece una dependencia representacional o instrumental, esto es, una de ellas "se pone en lugar de la otra". Esta noción permite formular en términos semióticos, y de una manera general y flexible el conocimiento matemático y comentar en términos de "conflictos semióticos" las dificultades y errores de los estudiantes. Permite proponer una interpretación del conocimiento y la comprensión de un objeto O (sea ostensivo o no ostensivo, elemental o sistémico, etc) por parte de un sujeto X (persona o institución) en términos de las funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las cuales se pone en juego O como funtivo.

Godino (2002b) considera que la cognición matemática debe contemplar las facetas personal e institucional, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas pero cuyo estudio es esencial para la educación matemática. El significado de los términos y expresiones se debe buscar en el uso que se hace de ellos en los contextos institucionales y los juegos de lenguaje de los que forman parte.

La modelización semiótica del conocimiento permite interpretar la noción de esquema como la faceta interiorizada (no ostensiva) de una praxeología personal, y las nociones de concepto-en-acto y teorema-en-acto como componentes parciales constituyentes de dichas praxeologías personales.

1.4.4. La Técnica del Análisis Semiótico.

El análisis semiótico es una técnica analítica para determinar los significados institucionales y personales puestos en juego en los procesos de instrucción matemática. Este método también permite describir el proceso de cambio de los significados como consecuencia de las interacciones en el aula, los conflictos semióticos y los procesos de negociación entre significados personales e institucionales.

Godino (2002b, pag 258) llama "*análisis semiótico de un texto matemático a su descomposición en unidades, la identificación de las entidades puestas en juego y las funciones semióticas que se establecen entre los mismos por parte de los distintos sujetos*". El análisis semiótico será pues la indagación sistemática de los significados (contenidos de las funciones semióticas) puestas en juego a partir de la trascripción del proceso, y de cada una de las partes en que se puede descomponer dicho texto, para un interpretante potencial (análisis a priori). Cuando el texto corresponde al protocolo de respuestas de los sujetos en interacciones afectivas el análisis permitirá caracterizar los significados personales atribuidos de hecho por los emisores de las expresiones (análisis a posteriori).

En ambos casos se pueden confrontar con los significados institucionales de referencia, lo que permite formular hipótesis sobre conflictos semióticos potenciales y contrastarlos con los efectivamente ocurridos, y sobre puntos críticos de la interacción de los diversos agentes en los cuales puede haber vacíos de significación, o disparidad de interpretaciones que requieran procesos de negociación de significados y cambios en el proceso de estudio. Esta teoría analítica se basa en el uso sistemático de la noción de función semiótica y de la ontología matemática propuesta por Godino (2001, citado por Arrieche, 2002). La comparación entre los significados atribuidos a los objetos matemáticos por dos instituciones o por una persona y un referente institucional nos permite identificar conflictos semióticos entre dichos agentes, los cuales se refieren a toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden opinar sobre las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas.

Para aplicar esta técnica se requiere disponer de los textos con la planificación del proceso instruccional, trascripciones del desarrollo de las clases, entrevistas y respuestas escritas a las pruebas de evaluación aplicadas. En definitiva, el análisis se aplicará a un texto que registra la actividad matemática desarrollada por los sujetos participantes. El estudio se basará en descomponer el texto en unidades, que denominaremos semióticas. El criterio para definir las unidades de análisis será el cambio de elemento de significado, esto es, cuando se cambia de problema a estudiar dentro del campo de problemas considerado, se pasa del enunciado del problema al desarrollo de una técnica, el empleo de una notación, al uso o identificación de una propiedad, o a la descripción, sistematización y validación de las soluciones. En principio cada unidad se puede descomponer en tantas subunidades como términos y expresiones matemáticas contenga, o también varias unidades se pueden agrupar y constituir unidades semióticas más extensas.

Como ejemplo de este método, en los cuales nos hemos basado para la realización de nuestro estudio, hay que citar los trabajos de Godino (2002b) y Arrieche (2002). En el primero se analiza un texto sobre la mediana y en el segundo sobre teoría de conjuntos. En ambos casos los textos están dirigidos a estudiantes de primer curso de Magisterio. El análisis sugiere la complejidad de cualquier noción matemática, y permite caracterizar los elementos del significado institucional local del contenido matemático pretendido en el proceso de estudio, los cuales pueden ser confrontados con el significado de referencia correspondiente.

Ernest (1997a) considera desde una perspectiva semiótica que una tarea matemática completa es una transformación secuencial de n signos ($\mathbf{S_k}$) y n-1 transformaciones ('ð'). Esto viene representado por la sucesión $\boldsymbol{S_1}$ ð $\boldsymbol{S_2}$ ð $\boldsymbol{S_3}$ ð...ð $\boldsymbol{S_n}$. $\mathbf{S_1}$ es una representación de la tarea como inicialmente está construida y $\mathbf{S_n}$ es la representación de su estado final, supuestamente la solución pedida.

Cada paso $\boldsymbol{S_k}$ ð $\boldsymbol{S_{k+1}}$ es una transformación de signos que puede ser entendida a dos niveles. Cada signo $\boldsymbol{S_k}$ (= S_k / I_k) es un par compuesto por un símbolo S_k y un significado I_k. Ernest (1997a) muestra con un ejemplo como utilizar esta secuencia en el análisis semiótico de una tarea.

Este análisis semiótico se aplicará en dos momentos diferentes de nuestro proceso investigador. En un primer lugar, estudiaremos una colección de problemas propuestos en las Pruebas de Acceso a la Universidad y, en segundo lugar, el libro de texto utilizado por los alumnos. En ambos casos aplicaremos el mismo esquema:

- Unidades primarias de análisis: dividiremos el texto en las unidades adecuadas para su estudio.

- Componentes y unidades elementales: identificaremos las entidades primarias, es decir, las unidades del lenguaje, las situaciones-problema, acciones, conceptos, propiedades y argumentos.
- Conflictos semióticos potenciales: buscaremos los desajustes entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa, comparando el texto analizado con el punto de vista matemático experto.

También analizaremos los componentes del significado sistémico (lingüísticos, situacionales, actuativos, conceptuales, proposicionales y validativos) y se realizará una síntesis de los conocimientos puestos en juego

1.4.5. Constructos del EOS utilizados en esta investigación.

De entre la variedad de nociones teóricas introducidas por el EOS para el análisis de las prácticas, nos han resultado especialmente útiles algunas de las facetas duales y los constructos de *configuración epistémica y cognitiva* (lenguaje, proposiciones, definiciones, procedimientos, argumentos y situaciones-problema). La ventaja de las facetas duales es que permiten ver las prácticas desde diferentes perspectivas.

Si bien cada una de estas perspectivas nos aporta información relevante sobre las prácticas de resolución de problemas, consideramos esencial tener en cuenta las facetas elemental-sistémica, institucional-personal e intensiva-extensiva. En concreto, la faceta institucional-personal la consideramos básica para poder comparar la resolución de una situación realizada por un alumno con la que se considera correcta desde el punto de vista institucional.

El EOS nos permitirá marcarnos un fin en esta investigación, como será la caracterización de significados en el estudio del Álgebra Lineal de 2º de Bachillerato, y la relación entre estos significados y los significantes que los representan y entre los significados entre sí. El foco del estudio comprende tres categorías: epistémica, cognitiva e instruccional, es decir, se estudiaran los significados institucionales, personales y la interacción entre ambos.

Un problema fundamental en didáctica es la construcción de significados institucionales sobre un objeto matemático en un determinado nivel escolar, es decir, el diseño curricular. La enseñanza debe estar apoyada en la presentación, en el tiempo y con los medios disponibles, de una muestra representativa de problemas y actividades. Por tanto consideramos esencial incluir en nuestra investigación un análisis del currículo escolar para el curso de 2º de Bachillerato y un análisis de los libros de texto usados en este nivel. Este estudio nos determinará los significados institucionales y, una vez que los conozcamos, pasaremos a averiguar los personales.

Para justificar la perspectiva sistémica basta pensar en las diferentes maneras de resolver problemas. En la siguiente situación, por ejemplo, se puede observar la importancia que tiene el "lenguaje":

En la siguiente tabla se indica la audiencia prevista (en miles de espectadores) por tres cadenas de TV (A, B, C) en una determinada semana y en cada uno de los tres segmentos horarios (Mañana: M, Tarde: T, Noche: N).

	A	*B*	*C*
M	*40*	*60*	*20*
T	*60*	*40*	*30*
N	*100*	*80*	*90*

Sin embargo, como consecuencia de la calidad de los programas emitidos, se produjo en la audiencia prevista (y en todos los segmentos horarios) una reducción del 10% para la cadena A, una reducción del 5% para B y un aumento del 20% para C.

a) Obtén la matriz que representa la nueva audiencia de las tres cadenas A, B, C en los tres segmentos horarios M, N, T.

b) Sabiendo que el beneficio que obtiene cada cadena por espectador es de 3 euros por la mañana, 4 euros por la tarde y 6 euros por la noche, obtener mediante cálculo matricial los beneficios para cada una de las tres cadenas.

Representación aritmética: (apartado a)

40·0'9 = 36 , 60·0'9 = 54 , 100·0'9 = 90

60·0'95 = 57 , 40·0'95 = 38 , 80·0'95 = 76

20·1'2 = 24 , 30·1'2 = 36 , 90·1'2 = 108

Poniendo este resultado en forma matricial, como pide el problema, encontramos:

$$\begin{pmatrix} 36 & 57 & 24 \\ 54 & 38 & 36 \\ 90 & 76 & 108 \end{pmatrix}$$

Representación matricial:

$$\begin{pmatrix} 40 & 60 & 20 \\ 60 & 40 & 30 \\ 100 & 80 & 90 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0'9 & 0 & 0 \\ 0 & 0'95 & 0 \\ 0 & 0 & 1'2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 57 & 24 \\ 54 & 38 & 36 \\ 90 & 76 & 108 \end{pmatrix}$$

Según el tipo de lenguaje utilizado, el mismo problema plantea diferentes exigencias conceptuales y técnicas: la primera representación (aritmética) se corresponde a la idea siguiente: "*multiplicamos cada elemento de la tabla por la reducción o el aumento correspondiente y después ponemos los resultados en forma de una matriz en lugar de en forma de tabla*"; en la segunda representación (matricial) hay también exigencias técnicas de cálculo numérico. Sin embargo, en este caso entre en juego el cálculo matricial, siendo la dificultad del problema averiguar si hemos de multiplicar por una matriz fila, una matriz columna o una diagonal y por qué lado, siempre teniendo en cuenta que hemos de multiplicar o sumar datos coherentes entre sí (no tiene sentido multiplicar un elemento de la cadena A por el descuento de la cadena B) y presentar unos resultados también coherentes.

Capítulo 2.
Descripción del problema de investigación.

2.1- *Génesis del problema.*

En esta tesis se propone un tema de investigación de interés curricular sobre el papel que el Álgebra Lineal debería desempeñar en la formación de los alumnos de 2º curso de Bachillerato, por lo que centraremos esta investigación en el estudio de esta organización matemática (Chevallard, 1999). De acuerdo con lo expuesto en el marco teórico tenemos un conjunto de situaciones y uno de conceptos que permiten analizar estas situaciones como tareas matemáticas. Estas situaciones son todas aquellas actividades que vamos a plantear en el aula de 2º de Bachillerato y que hacen referencia a componentes de dicha organización matemática: matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones. En cuanto a los constructos que nos permitirán analizar estas situaciones están todas aquellas ideas reflejadas en el marco teórico.

Nuestra principal finalidad será explicitar los significados que aparecen durante el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra Lineal. Por tanto, analizaremos una componente formal y una funcional y la relación entre ellas. En la primera hemos de estudiar aquellas evidencias derivadas directamente de la lógica interna del Álgebra Lineal, y las tendencias de los alumnos a la hora de resolver las actividades asociadas a este campo. En cuanto a la componente funcional, su estudio implica el análisis del entorno de enseñanza, es decir, currículo, libros de texto o Pruebas de Acceso a la Universidad., lo que Chevallard (1985) llamó noosfera.

El interés por este tema surge a partir de la experiencia docente como profesora de matemáticas de secundaria, primero en el antiguo COU y luego en 2º de Bachillerato, tanto de la especialidad de Ciencias de la Naturaleza y la Salud como de la de Humanidades, y observando un hecho que nos resultó curioso: las calificaciones que obtienen los alumnos en los exámenes de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones son-mejores que las del resto del curso. Incluso algunos estudiantes aseguraban que era la primera vez que obtenían una calificación de 8 o de 9 en matemáticas. Este examen era el primero del curso de 2º de Bachillerato, y al hacer el segundo examen (referido a otra temática), el alumno volvía a sacar una nota similar a las de cursos anteriores (que muchas veces era un 2 o un 3).

Este hecho no podía dejar de sorprendernos y decidimos tomarlo como tema de investigación. Otra cosa que nos atraía era que otros estudios que se centraban en temas concretos del currículo siempre se preguntaban por qué dichos temas resultaban tan difíciles a los alumnos, pero, en este tema en concreto, nosotros teníamos que preguntarnos lo contrario: ¿Por qué les resulta fácil?

Antes de comenzar la investigación intentamos contestar a esta pregunta nosotros mismos, únicamente analizando nuestras clases y nuestros alumnos y la respuesta era evidente: estamos enseñando a los estudiantes unos algoritmos rutinarios que les resultan relativamente sencillos de recordar. Tal y como planteamos las clases y los exámenes, que vienen condicionados por lo que más tarde se les pedirá en el examen de selectividad, el alumno puede sacar una calificación muy alta sin que eso signifique que comprenda qué es una matriz o un determinante y para qué sirven. De hecho, a veces los alumnos pueden enfrentarse a un problema de Selectividad sólo con dos sesiones de clase, cuando es evidente que este tiempo no es suficiente para entender los conceptos de matriz y determinante.

Partiendo de estas circunstancias nos propusimos plantear un tema de investigación que tuviera un interés tanto práctico como teórico, es decir, orientado a la mejora de un aspecto específico de la educación matemática y, que al mismo tiempo, supusiera un cierto avance en la puesta a punto y desarrollo de nuevos instrumentos teóricos. En Ferro (2004) se hizo un estudio previo que sirvió como experiencia piloto

Surge una pregunta importante para enfocar la investigación: *¿Qué papel juega la resolución de problemas en el Álgebra Lineal?* Según lo mencionado en el capítulo 1.2 (Vilanova y otros, 2001) el objetivo primario de la educación matemática debería ser que los alumnos aprendan a partir de la resolución de problemas, puesto que constituyen la fuente de sus prácticas. Sin embargo, en un curso con un claro carácter preuniversitario parece, al menos aparentemente, que la resolución de problemas no está presente a la hora de enseñar el Álgebra Lineal.

La naturaleza del problema nos conduce a un paradigma metodológico de tipo mixto entre métodos cualitativos y cuantitativos, utilizando con mayor intensidad el planteamiento cualitativo.

Para enfocar la investigación, nos hemos planteado varias preguntas, que podemos clasificar según tres dimensiones o categorías (Godino, 1999):

a) ¿Cuáles han sido las etapas de desarrollo evolutivo de objetos tales como ecuación, sistemas de ecuaciones, matrices y determinantes a lo largo de la historia? ¿Cuál es el estatus actualmente en matemáticas de las matrices y los determinantes? ¿Con qué otros objetos se relacionan? (Se intentará responder a esta pregunta desde el punto de vista del estudiante de secundaria) En el campo del Álgebra Lineal, ¿cuál es la relación entre las matemáticas puras, aplicadas y escolares? (*Problemática epistémica*, esto es, relativa al conocimiento matemático)

b) ¿Cómo aparecen en los currículos de secundaria y libros de texto? ¿Cómo se introducen en las clases de matemáticas? ¿Cuál es la transposición didáctica de estos objetos? ¿Qué legitima los contenidos de Álgebra Lineal en Secundaria? ¿Sobraría o faltaría algo? ¿Es útil el Álgebra Lineal para desarrollar los restantes temas del programa de 2º de Bachillerato? ¿Existen relaciones entre el Álgebra Lineal y estos temas? Tal y como se usan las matrices y los determinantes, ¿interesa incluir un tema específico o, por el contrario, dichos contenidos pueden y deben ser tratados a medida que se usan, como simples algoritmos? ¿Qué materiales utilizar en el estudio del tema? (*problemática instruccional*, esto es, relativa a la enseñanza y al aprendizaje).

Arrieche y Godino (2002) afirman que la decisión de incluir un tema en el currículo puede estar basada en su conexión con otras unidades, pero es necesario investigar su viabilidad y los requisitos necesarios para su estudio. Es necesario preguntarse qué conflictos cognitivos tienen los alumnos con los distintos componentes del significado de las nociones pretendidas y estudiar si hay mucha distancia entre los significados personales e institucionales, identificando posibles conflictos semióticos.

Para el profesor este problema tiene un interés que podríamos clasificar de práctico: ¿Qué contenidos matemáticos debo enseñar a mis alumnos y cómo debo hacerlo?

c) ¿Qué dificultades de comprensión tienen los distintos contenidos que configuran el Álgebra Lineal en 2º de Bachillerato? ¿Cuáles son los motivos de las mismas? (*problemática cognitiva*)

¿Les resulta fácil o difícil el tema a los estudiantes? ¿Por qué?

Puede que esta pregunta esté en contradicción con lo que hemos dicho anteriormente sobre que, según nuestra experiencia, el tema les resulta fácil, por lo que quizás habría que reformular esta cuestión de otro modo: **¿qué es lo que les resulta fácil: el tema en sí o aprobar el examen?**

d) ¿De qué manera podemos comprender las prácticas que realizan los estudiantes en el proceso de resolución de problemas a través de la integración de ciertos constructos teóricos del EOS? Esto equivale a identificar el significado que los alumnos atribuyen a los objetos matemáticos, es decir a distinguir los significados personales de los institucionales.

e) ¿Aporta algo este estudio al conocimiento existente? ¿Es aplicable, en general, a otras partes de la asignatura?

Hemos centrado este estudio sobre un contenido matemático particular, aunque creemos que este tipo de trabajos puede realizarse con otros contenidos en otros contextos instruccionales determinados, al igual que muchas de las preguntas planteadas podrían formularse también para analizar tanto aspectos prácticos como teóricos de otros objetos matemáticos.

2.2- *Objetivos e Hipótesis de la Investigación*

2.2.1- Objetivo General.

El objetivo general de nuestro trabajo consiste en investigar un aspecto del currículo matemático de los estudiantes de 2º de Bachillerato: *los efectos del contrato didáctico "clásico" sobre la construcción de significados personales de los objetos ligados al Álgebra Lineal, tales como matrices o determinantes*. Para alcanzar este objetivo, nos plantearemos los objetivos específicos que describimos a continuación.

2.2.2- Objetivos Específicos.

1º) *Explicitar los fundamentos teóricos que nos permitan tomar una decisión sobre la problemática abordada. Para ello será necesario hacer un estudio pormenorizado sobre aspectos epistemológicos de la teoría de matrices y determinantes, su origen, desarrollo, evolución y su papel en la matemática, analizando los problemas, motivaciones y obstáculos que dieron lugar a las nociones de matriz y determinante.*

Consideramos que una buena elaboración del currículo oficial, de las Pruebas de Acceso a la Universidad y de la programación didáctica de un profesor debe tener en cuenta los contenidos matemáticos elementales del Álgebra Lineal. Entre ellos figuran la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, la búsqueda de una notación adecuada y la consideración del papel que estos objetos tienen en la matemática. Un criterio para la inclusión de estos contenidos en el currículo será si son necesarios o no, y, si lo son, en qué medida. Con el fin de acotar nuestro problema de investigación, centraremos nuestro estudio en las matrices y los determinantes.

2º) *Realizar un análisis de una colección de libros de texto de matemáticas de 2º de Bachillerato y del antiguo COU, con el fin de caracterizar el papel de las matrices y los determinantes en este nivel educativo, es decir, para explicitar los objetos institucionales.*

3*º) Caracterizar los significados elementales o sistémicos puestos en juego en el libro de texto usado en el proceso de estudio del Álgebra Lineal.*

Es necesario un estudio de los diferentes manuales para identificar los puntos críticos del proceso de enseñanza y aprendizaje correspondiente y para ayudarnos a confirmar o refutar las hipótesis planteadas.

4*º) Caracterizar los conocimientos matemáticos puestos en juego por el profesor y los patrones de interacción entre el instructor y los estudiantes a propósito de los contenidos estudiados.*

La información obtenida nos facilitaría datos no sólo de los contenidos trabajados en el aula de manera explícita sino también de aquellos que aparecen implícitamente en el proceso de enseñanza.

5º) *Caracterizar los significados personales construidos por los alumnos sobre las matrices y determinantes tras el proceso de estudio*.

2.2.3- Hipótesis.

El estudio exploratorio realizado por la autora (Ferro, 2004) nos ha permitido formular algunas hipótesis (entendidas como expectativas) que trataremos de confirmar con esta investigación. Solamente debemos especificar en este punto las hipótesis previas a la toma de datos, ya que las generadas como consecuencia de nuestra investigación han de ser presentadas como un resultado de la misma en el capítulo dedicado a las conclusiones finales de la investigación. Estas hipótesis han de ser entendidas como expectativas sobre los resultados, dentro de un paradigma cualitativo, y no como hipótesis en sentido estadístico.

H1) *En la época de vigencia del anterior plan de estudios, el estudio de los espacios vectoriales constituía un contenido propio, y su aplicación a la enseñanza de las matrices propiciaba un enfoque formal de dichos objetos. En la actualidad, aunque el tema de espacios vectoriales no se estudia como tal, encontramos abundantes elementos de dicha organización matemática, en las definiciones de las operaciones planteadas con las matrices o método de Gauss, es decir, estamos usando la teoría de espacios vectoriales de forma implícita, abordando los mismos tipos de situaciones-problema que en el plan de estudios anterior (faceta epistémica) aunque de manera más desestructurada, lo que puede originar conflictos semióticos en los estudiantes.*

H2) *Los estudiantes de 2º de Bachillerato presentan dificultades en la comprensión de los conceptos básicos del Álgebra Lineal, pero no en la utilización de sus algoritmos de cálculo. (faceta cognitiva)*

H3) *Uno de los objetivos de la enseñanza de matrices y determinantes es utilizar el lenguaje matricial y sus operaciones como instrumento para representar e interpretar datos y relaciones, así como expresar en lenguaje algebraico problemas de ámbito cotidiano (sobre todo económico y social). Sin embargo, las Pruebas de Acceso a la Universidad presentan mayoritariamente ejercicios rutinarios. (faceta instruccional)*

2.3- *Metodología*

La naturaleza del problema considerado nos conduce a un paradigma metodológico de tipo mixto entre métodos cualitativos y cuantitativos (Goetz y LeCompte, 1988). Así pues, se combina el estudio documental y cualitativo en la faceta epistemológica de la investigación con diversas técnicas y enfoques en la parte instruccional y cognitiva.

Las cuestiones relativas a la faceta instruccional se enfocan mediante el estudio de casos de experiencias de enseñanza diseñados con criterios derivados del análisis epistémico y de los estudios cognitivos previos. El método de observación desempeñará un papel relevante. En la investigación de la faceta cognitiva se utilizará tanto el enfoque cuantitativo y experimental como el cualitativo-interpretativo (Arrieche, 2002, Batanero, 2002c). El carácter del estudio cualitativo es exploratorio, por realizarse con muestras de carácter reducido, y está orientado principalmente a la formulación de hipótesis que deberán ser contrastadas formalmente en nuevas investigaciones.

La investigación cualitativa ofrece métodos para obtener información descriptiva sobre personas por medio de la observación y las entrevistas en su ambiente natural. Este análisis es un proceso iterativo, ya que en lugar de efectuarse al final de la investigación se va realizando desde el comienzo. Tras haber hecho un estudio de tipo generativo en Ferro (2004), que ayudó a plantear las hipótesis de este trabajo, haremos ahora uno de tipo verificativo, intentando contrastar nuestras hipótesis.

Se hará un estudio de los libros de texto y exámenes de selectividad, para analizar cómo abordan los diferentes manuales los conceptos de matriz y determinante. Esto nos permitirá conocer distintas condiciones y restricciones del tratamiento dado por el sistema de enseñanza al Álgebra Lineal, así como su influencia en la configuración de los significados manifestados por los alumnos. Este análisis se realizará antes de comenzar con la recogida de datos propiamente dicha.

Se usarán dos técnicas de recogidas de datos. Para empezar se analizarán con detalle todas aquellas pruebas escritas realizadas por los alumnos, intentando determinar lo aprendido, las dificultades y los errores cometidos en los conceptos básicos del tema enseñado. Se ha preferido el estudio de los exámenes realizados por los alumnos, en vez de realizar una encuesta, porque se pretende buscar un contexto real en el que el estudiante esté realmente motivado para contestar a lo que se le pregunta de la mejor manera posible.

Para completar la información adquirida, realizaremos una entrevista de tipo clínico a una muestra reducida de alumnos, lo cual servirá para obtener opiniones generales sobre la importancia del tema. Estos estudiantes serán informantes clave que pueden aportar datos inaccesibles por otros métodos.

Se realizará una observación participante, ya que la investigadora es a la vez la profesora de los estudintes encuestados. Las notas de campo tomadas se reflejan en Ferro (2004). A la hora de redactar nuestras conclusiones no sólo tendremos en cuenta la información recabada de nuestros alumnos mediante el estudio de sus exámenes y el análisis de la entrevista sino que se intentará relacionar esta información con todo lo analizado en el estudio epistemológico y curricular hecho anteriormente. Nos interesará especialmente la identificación de inconsistencias entre los conocimientos declarativos (conceptos, propiedades, argumentos) y el conocimiento procedimental, puesto de manifiesto en el tratamiento y definición de distintos conceptos y la justificación del empleo de matrices y determinantes en la resolución de actividades.

Además, nos preguntamos si los alumnos de nuestro contexto socio-cultural serán capaces de movilizar los registros gráficos y algebraicos de las nociones estudiadas y usarlas como instrumentos para el planteo y resolución de situaciones-problemas.

Por tanto, podríamos decir que nuestro estudio está a medio camino ente un enfoque positivista, que trata de encontrar leyes y de confirmar hipótesis, y un enfoque interpretativo, orientado a la búsqueda del significado personal de los sujetos. En el sentido de Goezt y LeCompte (1988), nuestro modelo de investigación viene definido por una dimensión deductiva, generativa, constructiva y subjetiva.

- Deductiva: intentamos hallar datos que confirmen las teorías previas. Para ello contamos con el marco teórico explicado y los resultados de las investigaciones del capítulo 3. No descartamos, de todas formas, la generación de nuevas hipótesis en el transcurso de la investigación.

- Generativa: nos preocuparemos por probar la existencia de ciertos fenómenos, antes de probar su generalización.
- Constructiva: el fin principal es la definición de constructos y determinanción de sus posibles categorías.
- Subjetiva: el interés se centra en los constructos "tal y como la perciben los participantes" y se incorpora la subjetividad tanto del investigador como de los sujetos.

Comenzaremos por tanto presentando un estudio del Álgebra desde el punto de vista escolar, analizando un texto de COU y otro de 2º de Bachillerato, atendiendo sobre todo a la forma de plantear los conceptos de matriz y determinante y realizando una clasificación de las tareas de estos libros. Tras comparar ambos manuales pasaremos a estudiar los exámenes de Selectividad.

En el capítulo siguiente analizaremos el libro de 2º de Bachillerato utilizando el EOS, presentado en el marco teórico. Esto nos dará una idea más detallada de las unidades de significación presentes en el manual. Este análisis semiótico nos permitirá caracterizar tanto los significados sistémicos de los objetos estudiados como los significados elementales puestos en juego en un acto de comunicación matemática.

Por último, analizaremos los exámenes realizados por un grupo de alumnos y se hará una entrevista a dos de estos alumnos para aclarar posibles dudas que han dejado sus repuestas en los exámenes. Todo este análisis es el que nos permitirá elaborar unas conclusiones finales.

Se ha optado por utilizar los propios exámenes de los estudiantes en vez de una encuesta después de realizar una investigación previa (Ferro, 2004). En un curso marcado por las "prisas" tanto del alumnado como del profesorado para impartir todo el temario, el alumno sólo muestra interés por aquello que tiene relación directa con el examen de selectividad. Cualquiera otra prueba que se haga no resulta motivadora para el alumno, por lo que no la contesta intentado hacerlo lo mejor posible. Sin embargo, sí que se esfuerza a la hora de realizar un examen. Es por ello por lo que se ha optado por analizar directamente estos exámenes. Para evitar que el hecho de realizar una investigación influyese en cómo plantear estos exámenes, se analizaron exámenes ya realizados en ese momento

Capítulo 3.
Marco Teórico Específico.
Antecedentes de la investigación.

3.1- *Introducción.*

La revisión de los antecedentes de los aspectos epistemológicos, cognitivos e instruccionales de la organización matemática objeto de investigación se inició en la memoria de tercer ciclo, realizada en el programa de doctorado del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Santiago de Compostela (Ferro, 2004), aunque dicho examen no fue incluido en esa memoria por resultar demasiado extenso. La información recabada fue obtenida a través de diversas fuentes: textos de historia de las matemáticas, artículos y trabajos de investigación de diversos autores y currículos oficiales.

La exploración de investigaciones anteriores es esencial para confirmar las hipótesis planteadas. Explicitar los fundamentos teóricos del Álgebra Lineal o estudiar las opiniones de otros autores sobre la enseñanza del Álgebra o las Pruebas de Acceso a la Universidad nos ayudará a entender mejor los resultados de nuestra propia investigación.

Este apartado nos permitirá contestar a la pregunta *qué enseñar*, clave en cualquier proceso educativo, antes de que intentemos responder a la pregunta de *cómo enseñar*.

3.2. *Epistemología Histórica del Álgebra Lineal*.

En este capítulo presentamos un análisis epistemológico sobre el Álgebra Lineal, tema central en esta investigación, con el propósito fundamental de precisar su origen, desarrollo, evolución y su papel en la matemática.

Según Godino (2003b), para estudiar los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se debe tener en cuenta la naturaleza de los contenidos y preguntarse qué papel juegan la actividad humana y cuáles son los procesos socioculturales en el desarrollo de las ideas matemáticas. El análisis epistemológico de los objetos matemáticos debe permitir clarificar la naturaleza de dichos objetos y sus diversos significados según los contextos institucionales en que intervienen.

En los estudios históricos acerca del desarrollo de un concepto se evidencian elementos lógicos y epistemológicos claves en el proceso de constitución teórica, que posibilitan no sólo una mejor comprensión de esa noción, sino que revelan aspectos característicos de la actividad matemática de construcción, que merecen ser tenidos en cuenta por el docente en sus propuestas educativas.

Según Anacona (2003, pag 32) "*es posible pensar en un trabajo en Historia de las Matemáticas que dé cuenta de los complejos procesos de génesis, evolución y consolidación de una teoría matemática, sin olvidar que estos procesos de construcción se desarrollan en un marco de un contexto sociocultural, donde circulan de manera particular concepciones pedagógicas, filosóficas y teológicas, así como políticas educativas, entre otras. Aquí se parte de la premisa de que las matemáticas son, ante todo, una actividad humana; una construcción social compleja edificada durante miles de años en arduos procesos de interrelación cultural*".

En los estudios histórico-epistemológicos juega un papel esencial el análisis del proceso de la construcción teórica de un concepto. Estas investigaciones ofrecen grandes aportes a la Educación Matemática, pues tener un conocimiento sobre los diversos aspectos y conceptos que han incidido en la construcción de una teoría, permite formarse una idea más completa del discurso matemático en la que aparecen otros elementos constitutivos de las matemáticas y su actividad, los cuales generalmente se ocultan bajo una presentación acabada de carácter formal.

Otros estudios (Fauvel y Van Maanen, 1999, Labraña, Plata, Peña, Crespo, Segura, 1995) están más directamente relacionados con la enseñanza de las Matemáticas y en ellos se analizan aspectos, conceptos o métodos históricos que pueden incidir, directa o indirectamente, en las reflexiones sobre la enseñanza o el aprendizaje de las matemáticas. Por último, en otros trabajos (Caballero, 1996, De la Villa, 1998, Gracia, 2002, Quesada, 2003, Rojas, 2003) se examinan los diferentes procesos de elaboración, apropiación y transformación de teorías y saberes matemáticos en contextos socioculturales propios. Las matemáticas son una construcción humana, y como tal, están ligadas al ámbito social y cultural que las produce. Estudiantes y profesores han de verlas como una actividad con vínculos con el arte, la historia, la filosofía, la ciencia y otros campos de conocimiento.

El estudio de los procesos matemáticos de construcción, generalmente ocultos en una presentación exclusivamente formal o en la presentación escolar, aporta elementos conceptuales, metodológicos y epistemológicos, que el docente puede emplear en sus propuestas educativas.

La historia proporciona información sobre la naturaleza del conocimiento matemático y es un indicador de la complejidad epistemológica de ciertos objetos y, por ende, de posibles dificultades de aprendizaje. Una manera de ver la intervención directa de la historia en la enseñanza de las matemáticas es a través de la elaboración de actividades didácticas de carácter histórico.

Desde una concepción exclusivamente formalista de las matemáticas, un profesor, consciente o inconscientemente, hace énfasis en los procesos lógicos de demostración y en la forma rigurosa de presentación de un concepto. Si por el contrario, el instructor considera que las matemáticas son una construcción humana rodeada de múltiples contingencias y relacionada con otras disciplinas, reflejará esta concepción en su relación con el conocimiento matemático, con el texto y con los estudiantes. La historia de las Matemáticas trata de reconstruir la heurística de los procesos matemáticos para mostrar que son el producto del razonamiento humano en el marco de un contexto sociocultural. Un estudio histórico-epistemológico que dé cuenta de la génesis, evolución y consolidación de un objeto matemático en el marco de unas condiciones socioculturales, contribuye a un conocimiento de éste que trasciende los meros procesos algorítmicos.

Además, la historia de esta materia ofrece la posibilidad de mostrar los lazos que existen entre las matemáticas como construcción humana y otras producciones culturales de la humanidad. La perspectiva histórica muestra claramente que las matemáticas son un conjunto de conocimientos en evolución continua y que en dicha evolución desempeña a menudo un papel de primer orden la necesidad de resolver determinados problemas prácticos o internos a las propias matemáticas y su interrelación con otros conocimientos.

Para que la historia pueda usarse con provecho en didáctica de las matemáticas, la propia investigación ha de realizarse teniendo en cuenta las preguntas que están presentes en la didáctica de las matemáticas. Se pretende en este capítulo dar una nociones históricas de cómo aparecen las matrices y determinantes, objetos de nuestro estudio.

Aunque veremos que estos objetos ya habían sido estudiados antes, su verdadero impulso se da en el siglo XIX. Hay que decir, además, que no constituyen una gran innovación en matemáticas. Realmente representaron (y representan) una innovación del lenguaje. Son expresiones para ideas que ya existían previamente representadas de una forma más complicada.

Veremos también aspectos organizativos que en principio puede extrañarnos: el concepto de determinante es anterior al de matriz, aunque, lógicamente, la idea de matriz precede a la de determinante. Incluso se puede pensar que la noción de matriz y sus propiedades puede venir a partir de los cuaterniones, pero apareció directamente a partir de los determinantes.

3.2.1- China: Origen.

Para intentar comprender cómo surge el concepto de matriz debemos estudiar la evolución de la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales.

Los babilonios estudiaron problemas que modelaban mediante ecuaciones lineales, algunos de los cuales se conservan en tablillas de arcilla. Por ejemplo, una tablilla que data del año 3000 a.C. contiene una cuestión que se podría formular, en la actualidad, de la siguiente manera: (O'Connor, Robertson, 1996)

"*Tenemos dos campos cuya área total es 1800 yardas cuadradas. Uno produce grano: "$\frac{2}{3}$ de una medida" por yarda cuadrada y el otro "$\frac{1}{2}$ de una medida" por yarda cuadrada. Si la producción total es de 1100 medidas, ¿cuál es la producción de cada campo?*"

Uno de los primeros documentos sobre este tema aparece en China, durante la dinastía Han (200 a.C.-200 d.C.) y es el *Jiuzhang Suanshu* de Yang Hui (se conserva una copia del siglo III a.C. El autor y la fecha no se conocen con precisión, el documento también aparece llamado *Zhui Zhang Suan Shu*). La traducción del título de este escrito es *Prescripciones Matemáticas en nueve capítulos*. Este trabajo incluye problemas de sistemas de ecuaciones lineales con más de una incógnita. En el método de resolución los coeficientes del sistema de ecuaciones están representados mediante varas de cálculo expuestas de una manera concreta, como una matriz. Los números se manipulan para eliminar algunos de los coeficientes, dando como resultado soluciones numéricas explícitas. Se trata de algo esencialmente idéntico al método moderno conocido como "eliminación de Gauss", pero los chinos no desarrollaron la idea de determinación de una matriz, así que posiblemente es más correcto atender a la disposición como una exposición.

El capítulo VIII de este trabajo consta de 18 cuestiones que requieren el uso de sistemas de ecuaciones lineales. Encontramos problemas de hasta seis ecuaciones con seis incógnitas y la única diferencia con el método moderno de resolución es que los coeficientes se escriben en columnas y no en filas. Los números negativos también aparecen en la matriz y el capítulo incluye reglas para operar con ellos.

Podemos citar, como ejemplo, el problema I de la sección VIII:

Tres haces de grano superior, dos haces de grano medio y un haz de grano inferior producen 39 tous (recipiente para comida, habitual en aquella época en China). Dos haces de grano superior, tres haces de grano medio y un haz de grano inferior producen 34 tous. Un haz de grano superior, dos haces de grano medio y tres haces de grano inferior producen 26 tous. ¿Cuánto producen cada uno de los tipos de grano?

El problema se resuelve con el sistema siguiente (utilizando la notación actual):

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

La resolución viene expresada de la forma siguiente:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Se multiplica la segunda columna por 3:

1	6	3
2	9	2
3	3	1
26	102	39

A la segunda columna se le resta la tercera:

1	3	3
2	7	2
3	2	1
26	63	39

Se vuelve a restar la tercera columna a la segunda:

1	0	3
2	5	2
3	1	1
26	24	39

Mediante operaciones sucesivas con las columnas llegamos a:

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

que da lugar al sistema $\begin{cases} 36z = 99 \\ 5y + z = 24 \\ 3x + 2y + z = 39 \end{cases}$ de fácil solución.

Volvemos a encontrar otra referencia a este tema en el *Siyuan Yujian* o *Espejo precioso de cuatro elementos*, escrito por Chu Shetsie en 1303. Aquí las incógnitas de los sistemas de ecuaciones lineales aparecen sobre tableros de ajedrez.

En relación al tema de matrices, aunque más como curiosidad, hay que hacer algún comentario sobre los cuadrados mágicos, es decir, cuadrados formados por números en los que las sumas hechas sobre cada fila, columna o diagonal dan el mismo resultado.

Los cuadrados mágicos tienen su origen en China, donde eran conocidos varios siglos antes de Cristo. Según cuenta la leyenda, el primer cuadrado mágico fue revelado al emperador Yu (siglo XIII a. C.) a través de una tortuga divina que apareció en el río Luo, que lo llevaba grabado en su caparazón. Este cuadrado es conocido con el nombre de Luo-Shu (escritura del río Luo). A pesar de ello se cree que los cuadrados mágicos no son anteriores al siglo IV a.C. De la China pasaron al Japón, al Sudeste Asiático, a la India y de allí a Arabia. Al mundo occidental llegó su conocimiento mucho más tarde, a través de los árabes y de comerciantes y navegantes como Marco Polo. El primer cuadrado mágico del que se tiene documentación en Europa aparece en el grabado "Melancolía" de Alberto Durero.

El apelativo "mágicos" no es trivial y de ahora, sino que desde su han tenido un significado cabalístico y mágico, utilizándolos como amuletos para buenos o malos encantamientos, asociándolos con la religión, la astrología y la alquimia. El imposible cuadrado de 2×2 se veía como una imperfección, efecto o consecuencia del pecado. Los árabes utilizaron cuadrados de n impar con el número 1 en el centro, dígito que sería la única representación de Alá.

Estudiosos del Renacimiento como Cornelio Agrippa (1486-1535) se interesaron mucho por los cuadrados mágicos; pretendían encontrar en ellos la clave para entender las relaciones entre los astros y también entre los metales entonces conocidos. Bernard Frènicle de Bessy halló los 880 cuadrados mágicos de 4×4 que existen y los presentó en la Academia de las Artes de París en 1676. El término de cuadrado mágico se debe a él, en el título de su libro *Des quassez ou tables magiques*. Filip de la Hire los publicó en 1693. El buscar métodos para obtenerlos propició el desarrollo de los sistemas de ecuaciones.

3.2.2- Siglos XVII y XVIII: Desarrollo.

En *Ars Magna* (1545), Cardano da una regla para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales y la llama "*regula de modo*". Este algoritmo es esencialmente lo que hoy conocemos como "regla de Cramer" para resolver un sistema 2×2, aunque Cardano no desarrolla el paso final. De hecho no alcanza la definición de determinante pero se puede ver que su método conduce a la definición.

Muchos resultados de la teoría elemental de matrices, que aparecieron antes que la noción de matriz, fueron el objeto de la investigación matemática. Por ejemplo, De Witt en *Elements of curves*, publicado como parte de los comentarios de la *Géométrie* de Descartes en una versión en latín de 1660, muestra como una transformación de los ejes reduce una ecuación dada por una cónica a forma canónica. Esto equivale a diagonalizar una matriz simétrica, pero De Witt nunca pensó en estos términos.

La idea de determinante apareció en Japón y en Europa casi al mismo tiempo aunque realmente Seki, en Japón, la publicó primero. En 1683 este autor escribió *Método para resolver problemas ocultos*, que contiene métodos matriciales escritos como tablas en la misma manera que fueron construidos los métodos chinos descritos anteriormente. Sin tener una palabra que corresponda a determinante Seki presenta determinantes y da métodos generales para calcularlos, basados en ejemplos. Usando sus “determinantes” Seki fue capaz de calcular determinantes de matrices 2×2, 3×3, 4×4 y 5×5 y aplicarlos para resolver ecuaciones, pero no sistemas de ecuaciones lineales.

Leibniz, hacia 1693, en una carta dirigida al Marqués de L’Hôpital, utiliza un conjunto sistemático de índices para los coeficientes de un sistema de ecuaciones, dando su solución en función de ellos. Así, para escribir

$$a_1+b_1x+c_1y = 0$$
$$a_2+b_2x+c_2y = 0$$
$$a_3+b_3x+c_3y = 0$$

escribía

$$1_0+1_1x+1_2y = 0$$
$$2_0+2_1x+2_2y = 0$$
$$3_0+3_1x+3_2y = 0$$

Al eliminar las incógnitas obtuvo una relación entre los coeficientes. Si el sistema es compatible, entonces:

$$1_0 2_1 3_2+1_1 2_2 3_0+1_2 2_0 3_1 = 1_2 2_1 3_0+1_1 2_0 3_2+1_0 2_2 3_1$$

lo que con nuestra terminología sería:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$ (Labraña, Plata, Crespo, Peña, Segura, 1995)

Leibniz estaba convencido de que una buena notación matemática era la llave del progreso, así que experimentó con diferentes escrituras para sistemas de coeficientes. Sus manuscritos no publicados contienen más de 50 maneras de escribir sistemas de coeficientes, en lo cual trabajó durante un periodo de 50 años comenzando en 1678. Sólo dos publicaciones (1700 y 1710) contienen resultados de sistemas de coeficientes y éstos usan la misma notación que en la carta dirigida a L’Hôpital.

Leibniz usa la palabra “*resultante*” para ciertas sumas combinatorias de términos de un determinante. Prueba varios resultados de “resultantes” incluido lo que es, esencialmente, la regla de Cramer. También sabía que un determinante puede ser desarrollado a partir de cualquier columna. Al igual que el estudio de sistemas de ecuaciones con coeficientes le condujo a los determinantes, la investigación sobre formas cuadráticas con coeficientes le condujo de forma natural a la teoría de matrices.

Casi medio siglo después la solución de sistemas lineales de 2, 3 y 4 incógnitas por el método de determinantes fue redescubierta por Maclaurin (1729), que la publica en

Treatise of Algebra (1748, dos años después de su muerte). Su regla es la que usamos hoy en día, aunque fue Cramer quien la publicó en 1750.

Maclaurin considera que la solución en y del sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

viene dada como

$$y = \frac{af - dc}{ae - db}$$

y la solución para z en el sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz = m \\ dx + ey + fz = n \\ gx + hy + kz = p \end{cases}$$

viene expresada por

$$z = \frac{aep - ahn + dhm - dbp + gbn - gem}{aek - ahf + dhc - dbk + gbf - gec}$$

y entiende que el denominador consiste, en el 1º caso, en "*la diferencia de los productos de los coeficientes opuestos, tomados de los ordenes que afectan a las tres cantidades incógnitas".* (Maclaurin había expresado previamente que llamaría cantidades "del mismo orden a aquellas que están multiplicadas por la misma cantidad incógnita en las diferentes ecuaciones…. así como aquellas….que no afectan a ninguna cantidad incógnita. Y se llaman coeficientes opuestos los que se toman cada uno de una ecuación distinta y de un orden de coeficiente diferente").

Los numeradores en las fórmulas de Maclaurin difieren de los denominadores sólo por la sustitución en los segundos de los términos constantes por los términos en que figura la incógnita que se está calculando. Maclaurin expone también cómo se puede escribir análogamente la solución para un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, "*anteponiendo signos opuestos a aquellos términos en los que entran los productos de dos coeficientes opuestos*". Este comentario muestra que Maclaurin tenía en la mente algo semejante a la regla de alternancia de los signos que ahora se formula usualmente en términos del principio de las inversiones y las permanencias en una permutación.

Cramer publicó esta regla esta regla en 1750 en *Introduction à l'analyse courbes algebriques*, intentando dar respuesta al problema de determinar la ecuación de una cónica pasando por cinco puntos dados. El determinante del sistema que resultaba era suma de productos con un solo elemento de cada fila y columna, afectados por el signo “+” si el número de cambios de los elementos a partir de un orden dado era par, y por “–“, en caso contrario.

La regla aparece en el apéndice de este trabajo, aunque no se da ninguna prueba:

“*Se encuentra el valor de cada incógnita formando n fracciones de las cuales el denominador común tiene tantos términos como permutaciones de n elementos*”.

Cramer continua exponiendo cómo se calculan estos términos como productos de ciertos coeficientes en las ecuaciones y cómo se determina el signo. También indica como los n numeradores de las fracciones pueden ser encontrados cambiando ciertos coeficientes en el cálculo por términos independientes del sistema.

Aunque la obra de Maclaurin tuvo mucha popularidad (se publica una sexta edición en Londres en 1796), parece que se atendió más a las publicaciones de Cramer sobre resolución de sistemas de ecuaciones lineales, debido seguramente a la notación empleada por éste, en las que los coeficientes literales tenían superíndices, lo que facilitaba la determinación de los signos de los productos.

En 1764, Bezout, en su libro *Curso de Matemáticas* y de forma más detallada en *Théorie générale des équations algébriques* (1779), sistematizó el proceso de determinar los signos de los términos de un determinante. Demostró también que dadas n ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas la anulación del determinante de las incógnitas es una condición para que existan soluciones distintas de la trivial.

Vandermonde fue el primero, en 1772, en dar un desarrollo coherente de la teoría de determinantes, independiente de su uso para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, y creó una regla para su cálculo usando menores.

Laplace generaliza el método de Vandermonde en un ensayo publicado en 1772, *Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde* (Investigaciones sobre el cálculo integral y el sistema del mundo). Este autor afirma que los métodos utilizados por Cramer y Bezout eran impracticables, y en un documento donde estudia las órbitas de los planetas interiores, discute las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales sin calcularlas realmente, usando determinantes. Sorprendentemente Laplace utiliza la palabra *resultante* para lo que nosotros llamamos determinante, la misma palabra usada por Leibniz, aunque Laplace desconocía el trabajo de Leibniz. Laplace también da el desarrollo de un determinante por una columna, desarrollo que ahora se conoce con su nombre.

Lagrange utiliza las formas $\frac{1}{2!}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$ para el área de un triángulo y para el volumen de un tetraedro, respectivamente; resultados que aparecen en su artículo *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pirámides triangulaires* publicado en 1775. Estudió identidades para determinantes 3×3 pero no vio conexión entre su trabajo y el de Laplace y Vandermonde.

3.2.3. Siglo XIX: Evolución hacia los objetos actuales.

El término determinante fue usado por primera vez por Gauss en *Disquisiciones arithmeticae* (1801) mientras estudiaba formas cuadráticas. Usa esta palabra porque el determinante “determina” las propiedades de la forma cuadrática. Sin embargo, el concepto no es el mismo que el de determinante que nosotros conocemos. Él escribe los coeficientes de sus formas cuadráticas de manera rectangular. Describe la multiplicación de matrices (que considera una composición ya que todavía no se conocen las reglas del Álgebra de matrices) y la inversa de una matiz en el contexto particular de los coeficientes de las formas cuadráticas.

La eliminación de Gauss (ya estudiada por los chinos) fue usada por él cuando investigaba la órbita del asteroide Pallas. Usando las observaciones de Pallas tomadas entre 1803 y 1809, Gauss obtuvo un sistema de seis ecuaciones lineales con seis incógnitas. Gauss dio un método sistemático para resolver tales ecuaciones, que es precisamente lo que hoy conocemos como la eliminación de Gauss.

A Cauchy se debe el actual tratamiento de la teoría de determinantes, y el nombre de determinante (1815), tal y como lo conocemos hoy en día. Su desarrollo es el siguiente: forma el producto de n números $a_1,\ldots, a_n$ por todas las diferencias posibles entre dos de ellos, es decir:

$a_1a_2\ldots a_n(a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_n-a_1)(a_3-a_2)\ldots.(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})$

Define el determinante correspondiente como la expresión que se obtiene al cambiar el exponente por un 2º subíndice (a_r^s se convierte en a_{rs}) en el resultado anterior, obteniendo una expresión que escribiríamos de la siguiente manera: $S(\pm a_{11}a_{2.2}a_{33}\ldots.a_{n.n})$, y ordena los n^2 términos a_{rs} en un cuadrado:

$a_{1.1}$, $a_{1.2}$, $a_{1.3}$, …, a_{1n}

$a_{2.1}$, $a_{2.2}$, $a_{2.3}$, …, a_{2n}

………………………

$a_{n.1}$, $a_{n.2}$, $a_{n.3}$, …, $a_{n.n}$

que denomina "sistema simétrico de orden n". Define también como "términos conjugados" las parejas de elementos con los mismos subíndices pero en orden inverso, y a los términos autoconjugados los llama "términos principales"; al producto de los términos principales, es decir, a los que forman lo que nosotros llamamos diagonal principal, lo denomina "producto principal".

Conviene observar que hasta este momento la descripción de los determinantes es compleja en términos de índices y Cauchy la simplifica dando una definición general.

Cauchy dispone los elementos en filas y columnas y utiliza la notación de índices dobles a_{ij}, así como el término "ecuación característica" para p(λ) = 0 donde p representa un polinomio matricial. Es en esa memoria donde se encuentran numerosos teoremas generales como el de la multiplicación de los determinantes:

$$\left|a_{ij}\right| \cdot \left|b_{ij}\right| = \left|c_{ij}\right|$$

donde $\left|a_{ij}\right|$ y $\left|b_{ij}\right|$ son determinantes de orden n y $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$ (Esto es demostrar det(A)det(B) = det(AB), lo cual adelanta el producto de matrices). El término de la fila i y la columna j del producto es la suma de los productos de los elementos correspondientes de la fila i de $\left|a_{ij}\right|$ y de la columna j de $\left|b_{ij}\right|$. Este teorema había sido enunciado por Jacques Bidet en 1812, pero no demostrado satisfactoriamente.

Cauchy mejoró el desarrollo de Laplace de los determinantes. En 1829 encontró la primera demostración general de que los valores propios de una matriz simétrica son reales y de que la forma cuadrática correspondiente puede ser transformada en suma de términos cuadrados (diagonalización), mediante una sustitución ortogonal (o transformación lineal). Se encuentra, por último, en una memoria de 1826, una demostración directa de que la ecuación característica es invariante respecto de transformaciones ortogonales, con motivo de la reducción de una forma cuadrática de tres variables, y una demostración de que las raíces de la ecuación característica son reales.

Jacques Sturm da una generalización del problema de los valores propios en el contexto de la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. El concepto de valor propio apareció 80 años antes, en un trabajo de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, cuando D'Alambert estudiaba el movimiento de una cuerda con masas atadas a ella en varios puntos.

En 1825, Heinrich Scherk, en *Mathematische Abhandlungen* (Disertación Matemática), formuló las reglas para la adición de dos determinantes que tienen en común una fila o una columna, y para la multiplicación de un determinante por una constante. Enunció también que el determinante de una matriz en la que una línea es combinación lineal de dos o más líneas es nulo, y que el valor de un determinante diagonal es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Jacobi, alrededor del año 1830, y Kronecker y Weierstrass en los años 50 y 60 también consiguieron resultados sobre matrices pero en un contexto especial, el estudio de las transformaciones lineales. Jacobi publicó tres tratados de determinantes en 1841. Fueron importantes ya que por primera vez la definición de determinante fue dada de forma algorítmica, y aunque los datos del determinante no eran dados de manera específica, los resultados obtenidos eran igualmente válidos para los casos donde estos datos tenían funciones concretas. Estos trabajos de Jacobi hicieron que la idea de determinante fuera ampliamente conocida.

Eisenstein en 1844 denota las sustituciones lineales con una simple letra y muestra como sumarlas y multiplicarlas como números ordinarios si exceptuamos su falta de conmutatividad. Es el primero que da a las sustituciones lineales la estructura de Álgebra: "*Un algoritmo de cálculo puede consistir en aplicar las reglas usuales para las operaciones de multiplicación, división y exponenciación a ecuaciones simbólicas de sistemas lineales, obteniéndose siempre ecuaciones simbólicas correctas, con la única consideración que el orden de los factores no puede ser alterado*".

Aunque hoy en día la noción de matriz precede, organizativamente, a la de determinante, históricamente no fue así.

Sylvester (1814-1897) abordó los determinantes en el marco de la teoría de los invariantes. El determinante es un invariante en cuanto que determina todo el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones y posee propiedades comunes a determinantes de otros sistemas construidos de la misma forma.

Una de sus contribuciones principales a la teoría de los determinantes consiste en un método más eficaz para eliminar x de dos ecuaciones polinómicas de grados n y m. Sylvester llamó a este método el "método dialítico"; consiste en multiplicar una o las dos ecuaciones por la cantidad desconocida x que debe ser eliminada, y en repetir el proceso hasta que el número de ecuaciones obtenido sea superior en uno al número de potencias de la incógnita. De este conjunto de n+1 ecuaciones se pueden entonces eliminar todas las potencias n-ésimas, considerando cada una de esas potencias como una cantidad incógnita. Por ejemplo, la eliminación de x en el sistema:

$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3 = 0$

$b_0x^2+b_1x+b_2 = 0$

se efectúa multiplicando la segunda ecuación por x, y la resultante por x, así como la primera ecuación por x, de donde se obtiene

$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x = 0$

$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3 = 0$

$b_0x^4+b_1x^3+b_2x^2 = 0$

$b_0x^3+b_1x^2+b_2x = 0$

$b_0x^2+b_1x+b_2 = 0$

A continuación, se escribe el determinante del sistema de estas cinco ecuaciones

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

e igualándolo a 0 se obtiene la condición necesaria y suficiente para que las dos ecuaciones polinómicas originales posean una raíz común.

Cayley utiliza los determinantes como una notación clave en su estudio de la geometría analítica ordinaria del espacio n-dimensional. Usando coordenadas homogéneas, escribía las ecuaciones de la recta y del plano como se expone a continuación, y lo generaliza al hiperplano n-dimensional.

$$\begin{vmatrix} x & y & t \\ x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \end{vmatrix} = 0$$

Hacia 1850, Cayley en Inglaterra y Pierce en EEUU llegaron a constituir el conjunto de las matrices con sus operaciones como un “Álgebra”.

En el estudio hecho por Cayley de la clasificación de las geometrías a través de los grupos de transformaciones aparece por primera vez la teoría de matrices.

Una forma binaria cuadrática $f = ax^2+2bxy+cy^2$ puede transformarse, si se aplica a x e y una transformación lineal T_1 definida mediante

$x = ax'+by'$

$y = cx'+dy'$

donde ad-bc = r.

La aplicación de T_1 a f produce una nueva forma

$f' = a'x'^2+2b'x'y'+c'y'^2$

La aplicación de otra transformación T_2 a f' produce una nueva forma de f, por ejemplo f'', y se pueden entonces estudiar las composiciones de transformaciones T_1T_2 o T_2T_1 y mostrar que esta composición no es conmutativa. A continuación se introduce el concepto de invariante considerando toda función I de los coeficientes de f que satisface la relación

$I(a',b',c') = r^w I(a,b,c)$

entonces I se llama invariante de f. Al utilizar la representación rectangular para representar las transformaciones en sus estudios de los invariantes algebraicos, Cayley introdujo el concepto de matriz:

"*No he obtenido ciertamente la noción de matriz de ninguna manera de los cuaterniones; fue más bien a partir de un determinante o como una manera cómoda de expresar las ecuaciones:*

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$ "

La primera memoria en la que introdujo las nociones básicas de las matrices fue redactada en francés y publicada, con el título *Remarquer sur la notation des fonctions algébriques* (Observaciones sobre la notación de las funciones algebraicas), en la revista de Crelle en 1855. En esa memoria introduce las matrices para simplificar la notación en la representación de las ecuaciones lineales simultáneas. El conjunto de ecuaciones

$\xi = \alpha x+\beta y+\gamma z$

$\eta = \alpha' x+\beta' y+\gamma' z$

$\tau = \alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z$

se escribe como

$$(\xi,\eta,\tau) = \begin{array}{|ccc|} (\alpha, & \beta, & \gamma) \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{array}(x,y,z)$$

donde $\begin{array}{|c|}(\quad)\\ \ \end{array}$ representa evidentemente $\left(\quad\right)$.

Esboza rápidamente en esa misma memoria la idea de la matriz inversa y de la multiplicación o composición de matrices. Pero su primer trabajo importante sobre el tema, titulad *Memoir on the theory of matrices* (Memoria sobre la teoría de matrices) fue publicado en las *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* (1858). Introduce la matriz nula y la matriz unitaria, respectivamente, mediante

$$\begin{matrix}(0 & ,0 & ,0)\\ |0 & 0 & 0|\\ |0 & 0 & 0|\end{matrix} \qquad \begin{matrix}(1 & ,\ 0 & ,0)\\ |0 & 1 & 0|\\ |0 & 0 & 1|\end{matrix}$$

Cayley define la adición de dos matrices de la siguiente manera:

$$(a\ ,\ b\ ,\ c) + (\alpha\ ,\ \beta\ ,\ \gamma) = (a+\alpha\ ,\ b+\beta\ ,\ c+\gamma)$$

$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'+\alpha' & b'+\beta' & c'+\gamma' \\ a''+\alpha'' & b''+\beta'' & c''+\gamma'' \end{vmatrix}$$

y enuncia, sin demostrarlo, que las sumas de matices son conmutativas o “convertibles” y asociativas. Presenta dos tipos de multiplicación: la primera es la “multiplicación por un escalar”; la segunda designa la multiplicación habitual o “composición”. Si *m* es un escalar y *A* es una matriz, entonces *mA* está definida, según Cayley, como la matriz cuyos elementos son, cada uno, *m* veces el elemento correspondiente de *A.* En cuanto a la multiplicación habitual de dos matrices, Cayley se sirve directamente de la composición de dos transformaciones. Así, ilustremos para dos matrices de orden 2 ese producto:

$$T_1: \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

seguida de

$$T_2: \begin{cases} x'' = b_{11}x' + b_{12}y' \\ y'' = b_{21}x' + b_{22}y' \end{cases}$$

entonces las relaciones entre x’’ e y’’, y x e y, vienen dadas por

$x'' = (b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21})x+(b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22})y$

$y'' = (b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21})x+(b_{12}a_{12}+b_{22}a_{22})y$

El producto de dos matrices es definido por Cayley de la manera siguiente (en notación moderna):

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{12}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

El elemento c_{ij} en la matriz “producto” es igual a la suma de los productos de los elementos de la i-ésima fila de la primera matriz (b_{11}, b_{12}, por ejemplo, con i = 1) y los elementos correspondientes de la j-ésima columna de la segunda matriz (a_{12}, a_{22}, por ejemplo, con j = 2). Según Cayley, esta forma de multiplicación es asociativa pero, en general, no es conmutativa. Señala que una matriz m×n puede ser compuesta únicamente por una matriz n×p. Introduce también la potencia n-ésima de una matriz M y subraya que $M^n \cdot M^p = M^{n+p}$.

A continuación, en la sección 17 de este mismo artículo, Cayley enuncia la inversa de la matriz

$$\begin{array}{ccc} (a & , b & , c) \\ \left| a' \right. & b' & \left. c' \right| \\ \left| a'' \right. & b'' & \left. c'' \right| \end{array}$$

en la forma

$$\frac{1}{\nabla} \begin{array}{ccc} (\partial a\nabla & , \partial a'\nabla & , \partial a''\nabla) \\ \left| \partial b\nabla \right. & \partial b'\nabla & \left. \partial b''\nabla \right| \\ \left| \partial c\nabla \right. & \partial c'\nabla & \left. \partial c''\nabla \right| \end{array}$$

donde ∇ es el determinante de la matriz y $\partial x\nabla$ es el determinante obtenido de ∇ reemplazando el elemento x en ∇ por 1 y todos los demás elementos de la fila y la columna que contiene a x por 0, lo que equivale a decir que $\partial x\nabla$ es el cofactor de x. El producto de una matriz y su inversa es la matriz unidad, denotada por I. Cuando ∇ es cero, la matriz es "indeterminada" (singular) y no posee inversa. Además, Cayley añade: "*Se puede decir que la matriz cero es indeterminada y que el producto de dos matrices puede ser cero sin que ninguno de los factores sea nulo, si sólo una o las dos matrices son indeterminadas*".

La última parte de la frase es errónea, porque es preciso que las dos matrices sean indeterminadas, ya que si AB = 0, con A indeterminada y B no, entonces $ABB^{-1} = 0$, y habría de ser A = 0.

La traspuesta de una matriz es definida de la manera siguiente:

$$\begin{array}{l} \text{tr } (a,b) = (a,c) \\ \quad |c,d| = |b,d| \end{array}$$

y Cayley prosigue la discusión sobre la traspuesta y enuncia que

tr (L M N) = (tr N)(tr M)(tr L)

Si tr M = M, entonces M es llamada por Cayley "simétrica" y si tr M = -M, entonces M es "alternada" o "antisimétrica". Cualquier matriz puede ser expresada como suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

Otro concepto tomado de la teoría de determinantes es la ecuación característica de una matriz cuadrada. Para la matriz M está definida como:

$$|M - xI| = 0$$

donde $|M - xI|$ es el determinante de la matriz M-xI e I es la matriz unitaria. Así, si

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

la ecuación característica (Cayley no usa el término, aunque Cauchy lo introdujo para los determinantes) es

$$x^2-(a+d)x+ad-bc = 0$$

Las raíces de esta ecuación son las raíces características (valores propios de la matriz).

Cayley presenta a continuación el teorema de Cayley-Hamilton y métodos para encontrar las raíces y las potencias de una matriz. Termina esa memoria enunciando algunas reglas con respecto a las matrices rectangulares, en particular la de que una matriz de orden n×m puede sumarse a una matriz del mismo orden, y la de que el producto de una matriz n×m por otra matriz es válido si el orden de esta última es m×p. Termina, finalmente, con la observación de que la traspuesta de una matriz n×m es una matriz m×n.

Fue Cayley también quien, en 1858, se dio cuenta de que era posible considerar la matriz de los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales como un operador que actúa sobre las variables de forma semejante a como un número lo hace sobre la incógnita x para obtener ax. La teoría se limitó al principio a las matrices cuadradas, pero la inclusión de matrices rectangulares aumentó el alcance de la proposición y además el campo de sus aplicaciones.

El nombre de matriz fue cuñado por Sylvester para atribuirle el significado de “madre de los determinantes” (1850).

“*Para este propósito debemos comenzar, no con un cuadrado, sino con un conjunto de términos consistente, supongamos, de m líneas y n columnas. Esto no representará en sí a un determinante, sino a una Matriz, de la cual podemos formar varios sistemas* *de determinantes fijando un número p, y seleccionando p líneas y p columnas, siendo cuadradas de orden p*"[5].

Kline afirma: "*La palabra matriz fue usada por primera vez por Sylvester cuando él realmente se quería referir a una disposición rectangular de números y no podía usar la palabra determinante, aunque a él sólo le importaban en aquel momento los determinantes que podía formar a partir de dicha disposición rectangular*".

En 1851 Sylvester utiliza informalmente el término matriz como sigue:

"*Formamos la matriz rectangular consistente en n filas y (n+1) columnas. Entonces todos lo n+1 determinantes que pueden ser formados eliminando cualquier columna de la matriz son iguales a cero*".[6]

En 1867 en su *Elementary Treatise on Determinants* Dogson usa el término "bloque" en vez de matriz: "*Soy consciente de que la palabra matriz ya se usa para expresar el significado para el que yo uso la palabra "bloque", pero seguramente la primera palabra no significa la forma en la cual se pueden presentar cantidades algebraicas, sino una operación con tales cantidades*".

En este libro se indican las condiciones, escritas en términos de determinantes, bajo las que los sistemas de ecuaciones tienen soluciones no triviales. Para que un conjunto de n ecuaciones lineales no homogéneas en n incógnitas pueda ser compatible es necesario y suficiente que el máximo orden de los menores no nulos sea del mismo orden en los menores ampliados o no, o en términos de lenguaje matricial, rangos de las dos matrices iguales.

Las nociones de matriz de los coeficientes y de matriz ampliada fueron introducidas por Henry Smith (1826-1883) con ocasión de la resolución de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

En 1870 la forma canónica de Jordan aparece en *Treatise on substitutions and algebraic equations*, de este mismo autor, en el contexto de forma canónica para sustituciones lineales sobre un cuerpo finito de orden primo.

En 1878, Frobenius escribió un trabajo sobre matrices: *De sustituciones lineales y formas bilineales*, aunque parece que desconocía lo hecho por Cayley. En este trabajo

[5] Esta cita es de "*Additions to the Articles On a new class of theorems, and O Pascal's theorem*", Philosophical Magazine, pp.363-370, 1850. Reprinted in Sylvester's Collected Mathematical Papers, vol. 1, pp. 145-151, Cambridge (At the University Press), 1904, pp. 150.

[6] Esta cita es de "*An essay on canonical forms, supplement to a sketch of a memoir of elimination, transformation and canonical forms*". Londres, 1851. Reeditado en Collected Mathematical Papers' Sylvester, vol 1, Cambridge (At the University Press), 1904, page 209.

trata con forma de coeficientes y no usa el término matriz. Sin embargo demuestra importantes resultados de matrices canónicas como representantes de clases de equivalencia de matrices.

Frobenius introdujo la noción de rango de una matriz en 1879, aunque en relación con los determinantes. Una matriz con m filas y n columnas tiene menores con k filas de todos los órdenes desde 1 hasta el menor de los dos enteros m y n inclusive. Una matriz tiene rango r si y sólo si tiene al menos un menor de orden r cuyo determinante no es 0 mientras que los determinantes de orden superior a r son 0.

En el trabajo básico sobre matrices, los elementos son números reales aunque una gran parte de lo que se ha hecho en nombre de la teoría de números estaba circunscrito a elementos enteros. Sin embargo éstos pueden ser números complejos y, por supuesto, casi cualquier otra cantidad.

Frobenius comienza a usar el término matriz en 1896, cuando conoce los trabajos de Cayley, probando el teorema de Cayley-Hamilton en el caso general, que Cayley sólo había probado para matrices 2×2 y 3×3.

3.2.4. Estado actual de los conceptos de Matriz y Determinante.

Se ha pretendido en este apartado estudiar la forma en que los distintos manuales tratan el tema del Álgebra Lineal. Los textos estudiados se corresponden a los primeros cursos universitarios y consideramos importante estudiar el estado de la cuestión en estos niveles antes de introducirnos a estudiar los manuales destinados a alumnos de educación secundaria. Sobre todo nos interesará ver cómo se introducen los conceptos de matriz y determinante y cómo cada manual divide el Álgebra Lineal en diferentes campos de saberes especializados para comparar posteriormente si las unidades didácticas impartidas en secundaria siguen un esquema similar.

El primer manual utilizado es *Álgebra Lineal*, de De Burgos (1994). El libro consta de seis partes. La primera corresponde a Linealidad y Rango, y está planteada como una iniciación donde se estudian los sistemas de ecuaciones lineales y el método de Gauss, el rango de vectores y matrices, las operaciones con matrices y matriz inversa y los determinantes. El segundo, tercero y cuarto capítulo se agrupan con el título de Álgebra Lineal, y engloba el estudio de espacios vectoriales, aplicaciones lineales, formas cuadráticas, espacios vectoriales euclídeos, diagonalización de endomorfismos y matrices y forma canónica de Jordan. Por último, las partes quinta y sexta corresponden a la Geometría Cartesiana y tratan los espacios geométricos, las cónicas y las cuádricas.

La primera definición que ofrece el libro es la de sistema de ecuaciones lineales y a continuación se da la expresión matricial de un sistema. No se ofrece la definición de matriz, pero sí la de matriz de los coeficientes y matriz ampliada (pag 6). El estudio de los sistemas se realiza a partir del cálculo entre filas de una matriz, con la utilización del método de Gauss, tanto para resolver el sistema como para discutirlo.

A continuación se plantea la definición de vector, con las propiedades de sus operaciones y el estudio de la dependencia e independencia lineal. Se estudia el rango de un conjunto de vectores y una matriz.

La definición de matriz la encontramos en la página 43:

Se llama matriz de tamaño $m \times n$, constituida por escalares de un cuerpo K (en particular, K = R o K = C), a cualquier tabla rectangular A formada por $m \cdot n$ escalares, dispuestos en m filas y n columnas. Se llama elemento de lugar (i,j) o ij de A al escalar que está situado en la intersección de la fila i-ésima (para i = 1,…,m) y la columna j-ésima (para j = 1,…n); si a este elemento se le llama a_{ij}, la matriz se denota poniendo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

También tenemos la siguiente definición:

Dados $m,n \in N$ y si I y J son I = {1,2,…,m} y J = {1,2,…n}, se llama matriz de tamaño $m \times n$, de escalares de un cuerpo K, a toda aplicación $A: I \times J \rightarrow K$; a la imagen de A de un par (i,j) se le llama elemento de lugar (i,j) de A y lo representaremos poniendo a_{ij}.

En cuanto a la definición de determinante:

Se llama determinante a una aplicación que a cada matriz cuadrada A = (a_{ij}) le asigna un escalar, que se llama determinante de la matriz A y se denota poniendo

$$detA \text{ , } det\ ({}^c\overline{a}_1, {}^c\overline{a}_2, ..., {}^c\overline{a}_n) \text{ o } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

de manera que se cumpla, para cualesquiera índice i y j que:

1º) $\det\left({}^c\overline{a}_1,...,{}^c\overline{a}_i^{'}+{}^c\overline{a}_i^{''},...,{}^c\overline{a}_n\right)=\det\left({}^c\overline{a}_1,...,{}^c\overline{a}_i^{'},...{}^c\overline{a}_n\right)+\det\left({}^c\overline{a}_1,...{}^c\overline{a}_i^{''},...,{}^c\overline{a}_n\right)$

2º) $\det\left({}^c\overline{a}_1,...,\lambda\, {}^c\overline{a}_i,...{}^c\overline{a}_n\right)=\lambda\det\left({}^c\overline{a}_1,...,{}^c\overline{a}_i,...{}^c\overline{a}_n\right)$, λ escalar

3º) ${}^c\overline{a}_i={}^c\overline{a}_j \Rightarrow \det A = 0$

4º) det I = 1 (I matriz unidad)

Por tanto, vemos que este manual divide la parte que correspondería a una continuación de lo aprendido en 2º de Bachillerato en cuatro campos delimitados, aunque con gran dependencia unos de otros:

- Sistemas de ecuaciones lineales: método de Gauss.
- Rango de vectores y matrices.
- Operaciones con matrices.
- Determinantes.

Otro manual estudiado es el de Noble y Daniel (1989): *Álgebra Lineal Aplicada.* La parte que nos interesa corresponde a los cinco primeros capítulos:

- Álgebra matricial.
- Aplicaciones.
- Soluciones de ecuaciones y cálculos de inversas. Método de Gauss.
- Soluciones de ecuaciones y cálculos de inversas. Teoría.
- Vectores y espacios vectoriales.

Resulta interesante el capítulo de las aplicaciones de matrices. Entre otras cosas, se plantea una situación de competencia entre negocios, que sirve para introducir las cadenas de Markov, y otra que estudia el crecimiento de la población, para lo que se calculan las potencias de una matriz. Los determinates se introducen en el capítulo 4 al hablar de la teoría. La forma de presentar las matrices y los determinantes es la siguiente:

Una matriz $p \times q$ es un arreglo rectangular A de pq números (o símbolos que representas números) encerrados en corchetes cuadrados; los números en el arreglo se llaman elementos y están colocados en p renglones horizontales y q columnas verticales.

El elemento (i,j) se denota como ‹A›$_{ij}$ y es lo que se encuentra en el cruce del i-ésimo renglón de la j-ésima columna, enumerando las columnas de izquierda a derecha y los renglones de arriba abajo.

La definición de determinante se plantea como un único número asociado a una matriz A p×p. Se define a partir de determinantes de tamaño (p-1)×(p-1).

det (1×1) = α

$$\det A = \sum_{j=1}^{p} \langle A \rangle_{1j} A_{1j}$$

Es decir, es la suma de los productos de los elementos del 1º renglón y de los cofactores del 1º renglón. A_{1j} se define como $(-1)^{1+j} \cdot M_{1+j}$, siendo M_{1+j} el determinante obtenido al eliminar el 1º renglón y la j-ésima columna.

Strang (1986) en *Álgebra Lineal y sus aplicaciones* plantea los siguientes capítulos:
- Eliminación gaussiana: notación matricial.
- Teoría de las ecuaciones lineales: espacios vectoriales.
- Proyecciones ortogonales y mínimos cuadradaos.
- Determinantes.

Lo que hay que destacar en este manual es que no presenta las definiciones teóricas de matriz y determinante. Las matrices las introduce directamente como la forma de escribir un sistema de ecuaciones lineales de forma abreviada y a partir de ahí realiza operaciones con ellas. Con respecto a los determinantes, los considera lejos del centro de la problemática del Álgebra Lineal y lo que hace, en vez de definirlos, es proporcionar una fórmula explícita para calcularlos. Menciona su utilidad dentro de las matemáticas: sirven, por ejemplo, para calcular la inversa de una matriz o el volumen de un paralelepípedo. Lo más importante son las propiedades que posee. Se definirá a partir de estas propiedades:
- Es una función lineal de la primera fila.
- Si permuto dos filas el determinante cambia de signo.
- El determinante de la matriz identidad vale 1.
- Si dos filas son iguales el determinante es cero.
- Si se sustrae a una fila otra fila multiplicada por un número el determinante no varía.
- Si una fila es cero el determinante es cero.
- Si la matriz es triangular el determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

- Si la matriz es singular su determinente es cero.
- El determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de cada matriz.
- El determinante de una matriz es igual al determinante de su traspuesta.

Encontramos que algunas de las propiedades proporcionan una información sesgada; por ejemplo, la primera propiedad (*es una función lineal de la primera fila*) sería más correcta si dijese: *es una función lineal de cualquier fila y cualquier columna*.

Lipschutz (1998) presenta el manual *Álgebra Lineal*, con los siguientes capítulos:
- Sistemas de ecuaciones lineales. Matrices.
- Vectores R^n y C^n. Vectores espaciales.
- Matrices.
- Matrices cuadradas. Matrices elementales.
- Espacios vectoriales.
- Espacios con producto interno. Ortogonalidad.
- Determinantes.

La definición de matriz es muy similar a la del manual de De Burgos (1994). Hay diferencias, sin embargo, en el planteamiento de determinante. Explica cómo calcular determinantes de orden dos y orden tres. Nuevamente nos encontramos con un manual que no presenta definición sino que simplemente dice cómo calcularlos. Después define el determinante de orden n como una suma de n! productos:

$$|A| = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} \quad \text{siendo} \quad \sigma = j_1 j_2 \ldots.. j_n S_n$$

Prieto, Álvarez y Arándiga (2000), en su trabajo *Álgebra Lineal. Problemas resueltos y cuestiones comentadas*, introducen los siguientes aspectos:
- Espacios vectoriales.
- Base y dimensión.
- Aplicaciones lineales.
- Matrices.
- Sistemas de ecuaciones lineales.
- Matrices positivas.

La definición de matriz, en este caso, es muy simple:

Consideremos un cuerpo (K, +, ·) y dos números enteros positivos n y m.

Matriz A con términos en K de orden (n, m): disposición de n·m elementos de K en forma rectangular en n filas y m columnas (las filas y columnas de A).

A continuación se dice lo que son los términos de A y sus distintas notaciones y, de forma similar a la que se verá presentan los manuales de secundaria, se habla de la igualdad de matrices y de las matrices fila, columna, cuadrada, simétrica, identidad, cero, notación por columnas, notación por filas, vector columna y vector fila.

El libro no menciona a los determinantes, ni siquiera cuando se plantea la resolución de sistemas de aplicaciones lineales.

3.2.5. Importancia del Álgebra Lineal en la Matemática.

Hay múltiples razones, como ya hemos visto, para justificar la enseñanza del Álgebra Lineal en el Bachillerato. En este capítulo vamos a estudiar el papel que juega esta parte de las Matemáticas dentro de esta misma disciplina.

Una función lineal de varias variables es una función de la forma $a_1x_1+\ldots+a_nx_n = b$. Si $b = 0$ la función se llama homogénea. La función lineal de varias variables juega el mismo papel entre las funciones de ese número de variables que la función lineal de una variable entre las funciones de una sola variable.

Las cuestiones cuya solución requiere la investigación sobre funciones de varias variables surgen en conexión con el estudio de la dependencia de una cantidad respecto de otras varias. Un problema se llama lineal si la dependencia considerada es lineal. Un problema lineal se caracteriza por:

- La *propiedad de la proporcionalidad*. La repercusión de cada factor por separado es proporcional a su valor.
- La *propiedad de independencia*. El resultado total de una acción es igual a la suma de los resultados de las acciones por separado.

Cualquier problema en el que intervenga la variación de una cantidad como consecuencia de la acción de varios factores puede ser interpretado, en primera aproximación y para pequeñas acciones, como lineal, es decir, como si tuviera las propiedades de linealidad e independencia.

Las magnitudes que se estudian en Física están caracterizadas frecuentemente por ciertos números: una fuerza por sus tres proyecciones sobre los ejes coordenados, la tensión en un punto dado de un cuerpo elástico por las seis componentes del tensor de tensiones, etc. Surge, por tanto, la necesidad de considerar simultáneamente varias funciones de varias variables, y, en una primera aproximación, varias funciones lineales.

Una función lineal de una variable tiene propiedades tan simples que no requiere un estudio especial. Otra cosa son las funciones lineales de varias variables, donde la presencia de más de una variable introduce algunas características especiales. La situación se complica más cuando pasamos de una función de varias variables a un conjunto de varias funciones de las mismas variables. Tenemos así un sistema de funciones lineales, que ya es un objeto matemático más complejo.

Otra aplicación, con relación con el campo de la Economía, es el uso de matrices para el estudio de los modelos lineales de producción (Prieto, Álvarez y Arándiga, 2000), definiendo matrices productivas y matrices de demanda final.

Además de estos problemas hay que contar con las necesidades de la geometría analítica. Es bien sabido que la geometría analítica del plano, y en mayor medida aún la del espacio, hacen uso, en lo que concierne a la teoría de rectas y planos, de los métodos del Álgebra Lineal en su forma más simple. Una recta en el plano viene dada por una ecuación lineal de dos variables que liga las dos coordenadas de un punto arbitrario de la recta. Un plano en el espacio viene dado por una ecuación lineal en tres variables (las tres coordenadas de un punto arbitrario del plano); una recta en el espacio, por dos ecuaciones lineales.

El uso del concepto de vector confiere a la geometría analítica, y en consecuencia a la teoría de ecuaciones lineales, una gran simplicidad y claridad. Pues bien, el uso del concepto de vector en sentido generalizado ofrece las mismas ventajas al Álgebra Lineal, sobre todo en la teoría general de sistemas de ecuaciones lineales.

Las operaciones de adición y multiplicación por un número están definidas para los vectores. Y lo están en relación con las operaciones similares con fuerzas, velocidades, aceleraciones, y otras magnitudes físicas que se pueden representar con vectores.

Si los vectores vienen dados por sus coordenadas, entonces las operaciones de adición y multiplicación por un número realizadas con vectores corresponden a las mismas operaciones con las filas o columnas formadas con sus coordenadas.

Así, es conveniente interpretar una fila o columna de tres elementos geométricamente como un vector en el espacio tridimensional. De esta forma, las operaciones básicas con filas o columnas pueden interpretarse como las correspondientes operaciones con vectores del espacio, de modo que el Álgebra de filas o columnas de tres elementos no difiere formalmente del Álgebra de vectores en el espacio tridimensional. Esta circunstancia hace que sea natural introducir una perspectiva geométrica en el Álgebra Lineal.

El campo del análisis numérico también hace uso de las matrices, por ejemplo, cuando se calcula la solución de ecuaciones diferenciales parciales de tipo elíptico.

Dada una ecuación diferencial parcial de segundo orden, con dos variables independientes *x* e *y*, de la forma:

$a(x,y)\Phi_{xx} + b(x,y)\Phi_{xy} + c(x,y)\Phi_{yy} + f(x,y,\Phi_x,\Phi_y) = 0$

es decir, una ecuación que es lineal en las derivadas parciales de segundo orden:

$$\phi_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \phi_{xy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \phi_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

se puede clasificar en base a la expresión b^2-$4ac$, formada por las funciones *a, b* y *c*. (Φ(x,y) es una solución de la ecuación). Una ecuación es de tipo elíptico si $b^2-4ac<0$.

Mediante métodos propios del análisis numérico (que no tiene objeto explicar con detalle en este trabajo) este tipo de ecuaciones puede reducirse a un conjunto de ecuaciones lineales, que requiere el uso de matrices para su resolución.

3.2.6. Análisis epistemológico de los conceptos de matriz y determinante.

Un análisis epistemológico de los conceptos de matriz y determinante requiere un estudio de su evolución histórica bajo consideraciones que nos aporten conocimientos significativos para la investigación en Didáctica de las Matemáticas.

Hemos realizado este análisis partiendo del estudio de la evolución del status matemático de estos objetos, describiendo las concepciones a través de las cuales se han desarrollado históricamente las nociones de matriz y determinante. Además intentaremos ver cuáles han sido los obstáculos epistemológicos encontrados en el estudio de estos objetos. Entre los aspectos más relevantes, se han descrito avances matemáticos que dieron origen a los conceptos de matriz y determinante y los matemáticos clave en su desarrollo, además de aplicaciones e importancia del Álgebra Lineal en la matemática. Con respecto al origen del Álgebra Lineal, la mayoría de los autores coinciden que surge del estudio de la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales y que todos los objetos y reglas relacionados con ellos son consecuencia de la búsqueda de métodos de resolución de este tipo de sistemas. Además, muchos resultados de la teoría elemental de matrices, aparecidos antes que la noción de matriz, fueron el objeto de la investigación de diferentes matemáticos.

De esta manera, y teniendo en cuenta los fundamentos teóricos, destacaremos los siguientes puntos:

a) Hemos de enmarcar los conceptos de matriz y determinante dentro del campo conceptual de los sistemas de ecuaciones lineales, ya que observamos que ambas nociones surgen estudiando la resolución de dichos sistemas. También los manuales consultados (De Burgos, 1994), presentan las matrices a partir de los sistemas de ecuaciones y el método de Gauss.

b) Las matrices son utilizadas como un instrumento de escritura muchos siglos antes de que sean consideradas objetos matemáticos. Ya en la antigua China se utilizan matrices (aunque no con la notación actual que conocemos), como una forma de disponer los coeficientes de un sistema de ecuaciones, sin escribir los paréntesis de la matriz. No existe conciencia de haber inventado un nuevo concepto matemático, es una forma de representación simbólica.

c) Un concepto matemático sólo adquiere sentido a través de las situaciones y problemas que resuelve, por lo que el estudio de matrices y determinantes ha de estar ligado necesariamente al análisis de los sistemas de ecuaciones y de los problemas que pueden ser resueltos mediante un sistema de ecuaciones lineales.

d) El uso del determinante también es anterior a su definición. El método que hoy conocemos como regla de Cramer es presentado y utilizado antes de hablar del concepto de determinante.

e) Históricamente la resolución de sistemas de ecuaciones, por su potencial modelizador, constituye un problema matemático muy relevante, y como tal podría ser presentado en las aulas, donde sólo se plantea como un ejercicio que se puede solucionar mediante un algoritmo.

f) La idea de determinante como objeto matemático precede a la de matriz, aunque en nuestros sistemas educativos la unidad didáctica correspondiente a determinantes siempre se imparte a continuación de la de matrices (en la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II ni siquiera forma parte del programa). De hecho el término matriz es utilizado por Sylvester en el sentido de "madre de los determinantes".

g) Algunos manuales actuales (Strang, 1986, Lipschutz, 1998) no consideran fundamental la noción de determinante a la hora de plantear los conceptos del Álgebra Lineal. Indican la forma de calcularlo y las propiedades que tiene, pero no le dan tanta importancia a su definición formal.

h) Un concepto viene dado por un conjunto de situaciones que forman parte de su significado, el propio significado y por su forma de representarlo. Sobre todo en el caso de la matriz no surgen al mismo tiempo estas características, por lo que también sería útil recordar esto a la hora de estudiar el Álgebra Lineal en el aula. Es muy posible que, al igual que le pasó a los matemáticos del pasado, los alumnos necesiten momentos diferentes para resolver problemas que requieran la presencia de matrices, para entender qué es realmente una matriz o para representarlas simbólicamente y trabajar operacionalmente con ellas.

i) Las ideas más primitivas de matrices y determinantes preceden en muchas centurias a sus definiciones teóricas. De hecho, muchos resultados de la teoría elemental de matrices fueron objeto de investigación matemática con bastante antelación a su estructura formal, como, por ejemplo, la diagonalización de una matriz. Leibniz consideraba que una buena notación matemática era la llave del progreso. Esta concepción de matrices y determinantes como una buena notación y como método de resolución de sistemas de ecuaciones puede considerarse como un claro obstáculo epistemológico para el desarrollo autónomo de los conceptos de matriz y determinante. Estuvo fuertemente arraigada en la mente de los matemáticos y perduró hasta mediados del siglo XIX con los trabajos de Cayley y Sylvester. Por ejemplo, Gauss consideró la multiplicación de matrices como una composición.

j) El principal obstáculo epistemológico para el desarrollo de estos conceptos fue la notación utilizada. Leibniz probó diferentes escrituras y Cramer obtuvo mejores resultados en sus investigaciones que Maclaurin, pese a que este desarrolló lo que hoy se conoce como *regla de Cramer*, debido precisamente a una mejor notación. También supuso un obstáculo epistemológico los nombres utilizados para nombrar estos conceptos: por ejemplo, Laplace utiliza la palabra *resultante* en lugar del término *determinante*. La descripción de los determinantes resultó bastante compleja hasta los trabajos de Cauchy.

k) Hasta 1858, con los trabajos de Cayley, no se reconoció la matriz de los coeficientes de un sistema como un operador que actúa sobre las variables, siendo un obstáculo epistemológico para el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.

l) Uno de los aportes significativos del desarrollo del Álgebra Lineal para la matemática, lo constituye el estudio de la geometría analítica. Conceptos como el de vector y el de dependencia lineal y el estudio de posiciones relativas rectas y planos en el espacio no se podrían entender sin un análisis previo de los conceptos y procedimientos del Álgebra Lineal, así como el desarrollo de la teoría de funciones dependientes de varias variables.

3.3. *Síntesis de investigaciones de referencia sobre la problemática de enseñanza/aprendizaje del Álgebra Lineal.*

En este punto describiremos, de manera resumida, las investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje del Álgebra. Hay que señalar que no hemos encontrado demasiados estudios sobre el Álgebra Lineal en el Bachillerato, sino que los trabajos se centran más en los primeros años de la Enseñanza Obligatoria y, sobre todo, en el paso de la aritmética al Álgebra.

Gascón (1998), en un trabajo sobre la evolución de la didáctica de las matemáticas, considera una cuestión importante a estudiar la desalgebrización del currículo de la secundaria obligatoria, que se manifiesta, entre otras cosas, por la desintegración del corpus de problemas algebraicos, la ausencia del uso sistemático de parámetros, la desaparición progresiva de las justificaciones algebraicas de los procedimientos aritméticos o geométricos y la pobre utilización que se hace de las fórmulas, reduciéndolas a simples algoritmos de cálculo.

Dickinson y Eade (2004) presentan un trabajo con estudiantes de once años que comienzan a resolver ecuaciones lineales, proponiendo un método no algebraico, mucho más visual, que consiste en representar la ecuación en una línea numérica. De esta forma una ecuación como $3x+12 = 5x+6$ pasa fácilmente a ser $2x+6 = 12$ sin necesidad de utilizar reglas algebraicas, difíciles de manejar a alumnos esa edad. Para estos autores, la evidencia sugiere que la mayoría de los estudiantes que resuelven ecuaciones utilizan unos procedimientos aprendidos y manipulan a ciegas, sin entender su significado real, de ahí la necesidad de un método en el que el alumno pueda analizar la marcha del proceso y entender qué es lo que está haciendo.

Mercado (2003), al que ya mencionamos en el capítulo dedicado a la resolución de problemas, presenta una experiencia en el aula, con alumnos de 4º de ESO trabajando el bloque de Álgebra. El problema que pone como ejemplo es el siguiente:

Un granjero dispone de cierto número de jaulas y de conejos. Si introduce 4 conejos en cada jaula, quedan tres conejos libres. Si introduce 5 conejos en cada una, queda una jaula con dos conejos menos. ¿Cuántos conejos y jaulas tiene el granjero?

El profesor intenta que los alumnos resuelvan el problema siguiendo los pasos que proporciona el método heurístico de Polya (1971), esto es, comprensión del problema, concepción de un plan de resolución, ejecución del plan propuesto y revisión de la solución obtenida.

Una vez resuelto el problema, la investigación se basó en el hecho de conocer qué habían copiado los alumnos de todo lo que se había dicho en clase y qué relación había entre lo que se había hablado en el aula y lo que había quedado plasmado en la pizarra. Como conclusión el autor señala que nuestra tarea como profesores debe ir encaminada a favorecer el desarrollo de nuestro estudiantado como resolutores independientes de problemas. Además este objetivo debe afrontarse desde distintas vertientes y para ello Mercado (2003) señala entre otras cosas la necesidad de revisar el tiempo dedicado a la resolución de problemas en el aula en contraposición a las tareas de tipo mecánico o de repasar los roles asignados al profesor y a los alumnos. Para este autor un enfoque adecuado de las clases de matemáticas es partir de la resolución de problemas para ir construyendo la teoría matemática necesaria que nos permita dar solución a dichos problemas.

Otra investigación importante es la realizada por Panizza, Sadovsky y Sessa (1999) sobre la ecuación lineal con dos variables. Este trabajo busca identificar condiciones de apropiación del Álgebra elemental en alumnos de secundaria, en concreto se ubica en la compleja problemática del paso de la aritmética al Álgebra.

El estudio consistió en presentar a alumnos de 16-18 años, que ya habían estudiado la ecuación de la recta y los sistemas de ecuaciones lineales, la ecuación $3x+2y = 7$ y pedirles una solución. Se diseñó una entrevista que fue administrada a tres parejas de chicos de un mismo curso, seleccionados por la profesora de la clase respondiendo al pedido de las investigadoras de elegir alumnos relativamente "buenos", que pudieran disponer con cierta comodidad de los conceptos trabajados y con suficiente habilidad en las técnicas de despejar incógnitas. La hipótesis desde la que se trabajaba es que la concepción de las letras como incógnitas llevaría a los alumnos a sostener que la ecuación lineal con dos variables tiene solución única.

Casi todos los alumnos entrevistados enfrentan el problema extendiendo conocimientos producidos sobre otros objetos: ecuaciones de una variable y sistemas lineales con dos variables. Uno sólo de los estudiantes consultados se apoya en el concepto de función.

La mayoría los alumnos anticipan que la ecuación debe tener solución única, basándose en sus representaciones acerca de los problemas que se resuelven con ecuaciones y de las representaciones de las letras como números ya determinados pero desconocidos.

La conclusión del trabajo es que la ecuación lineal con dos variables no es reconocida por los alumnos como un objeto que define un conjunto de infinitos pares de números. Por otra parte, cualquiera que haya sido la labor realizada alrededor de "ecuación de la recta", ésta no parece suficiente para que los alumnos puedan establecer una relación entre los puntos de la recta y las soluciones de la ecuación correspondiente.

En Rodríguez (1999) se hace una reflexión sobre posibles cambios curriculares en la enseñanza del Álgebra en Bachillerato y se incluye una propuesta metodológica haciendo uso de las calculadoras gráficas, planteándose si algunos de los contenidos tendrían cabida en unos procesos de instrucción que se abordan teniendo en cuenta la existencia de las nuevas tecnologías.

Según la misma autora los contenidos de este bloque están organizados de tal manera que casi el único objetivo del estudio de las matrices y los determinantes es para su utilización como herramientas para la resolución de sistemas de ecuaciones. Aunque en el currículo se menciona que el lenguaje matricial ha de usarse como instrumento para representar datos, normalmente las actividades presentadas en el aula se centran en las operaciones con matrices, siendo operaciones fáciles pero que requieren tiempo. En opinión de la autora, no aportan a los alumnos ningún conocimiento matemático al ser la ejecución inmediata de meros algoritmos que ya conocen. Se trata también de ejercicios en los que el profesor suele poner datos para que los problemas "salgan" y por tanto no son adecuados a los números que aparecen en la vida real.

La autora propone la resolución de dichos ejercicios con la calculadora gráfica, aportando algunos ejemplos. Su opinión es que el uso de estas máquinas debería servir para ganar tiempo para abordar problemas reales y para poder profundizar en los conceptos y no quedarse únicamente en las formas, aplicando el cálculo matricial a situaciones de la vida cotidiana.

En el tema de Sistemas de Ecuaciones Lineales los profesores enfocan su esfuerzo en que los alumnos sepan resolver sistemas dependientes de un parámetro, pero la realización de las operaciones correspondientes a este tipo de ejercicios no permite que los estudiantes puedan reflexionar sobre el significado de lo que representa un sistema de ecuaciones lineales. El trabajo presenta ejemplos de resolución de sistemas de ecuaciones con la calculadora gráfica.

También se muestran algunas propuestas metodológicas para el bloque de Álgebra haciendo uso de calculadoras gráficas. Por ejemplo, trabajar con lápiz y papel matrices de dimensiones pequeñas y con calculadora las de dimensiones grandes.

Quesada (2003) propone una actividad para el aula usando la idea de codificación de mensajes con el uso de operaciones con matrices, adaptándose por tanto al currículo elemental de matemáticas en el Bachillerato. Caballero (1996, citado por Quesada, 2003) define criptografía como *el arte de escribir mensajes en clave secreta o enigmáticamente*. Tras resumir los principios básicos de esta disciplina, presenta el objetivo de la actividad con matrices: dado un secreto, repartir la información entre dos personas, de forma que la información aislada que posee cada persona por separado no dice absolutamente nada, y el secreto sólo podrá ser revelado cuando los dos que poseen parte de él se reúnan y aporten su información. Los fundamentos matemáticos en los que se basa la estrategia presentada son las operaciones con matrices, y en concreto, el producto de matrices.

Noriega y Núñez (2001) presentan algunas ideas preliminares acerca de las posibles vinculaciones que pudieran existir entre la producción de significados asociados a los contenidos de Álgebra en el marco del proceso de formación de un profesional de la Matemática.

Cualquier intento de dar respuesta a los múltiples interrogantes científicos que pueden plantearse en relación con los significados de los objetos matemáticos debe realizarse a partir de la perspectiva epistemológica a través de la cual el investigador concibe la naturaleza de los objetos y, en términos generales, de la actividad matemática.

El contenido de la Matemática se ha desarrollado mediante sucesivas abstracciones y generalizaciones hasta convertirse en un complejo sistema lógicamente estructurado. De este modo puede plantearse que a partir de una diversidad de acciones humanas condicionadas, en última instancia, por los problemas que plantea la práctica social, esta materia deriva, por una parte, un cierto número de nociones genéricas y no arbitrarias, las cuales establece de modo formal y, por la otra, las interrelaciones existentes entre las mismas, en un proceso de estrecha relación dialéctica entre una y otra dirección. El establecimiento de estas nociones y el descubrimiento de tales interacciones constituyen, en términos generales, la esencia de la actividad matemática.

En Fonseca (2004) encontramos un ejemplo de cuestionamiento inicial que podría motivar el estudio universitario del Álgebra Lineal. La investigación se realiza en un curso trimestral de esta especialidad para la asignatura de Matemáticas de primer curso de Ciencias Económicas y Empresariales. El autor presenta una organización matemática que permite estructurar el tema de la diagonalización de matrices en torno a un tipo de problemas. Para ello se parte de un problema de movilidad de recursos humanos en una empresa, el cual lleva a calcular mediante Excel las potencias sucesivas de una matriz.

Ríos (1998) muestra como afrontar un curso de Álgebra Lineal utilizando MatLab. El curso está orientado a estudiantes de ingeniería de sistemas y administración. Con este programa informático se pueden hacer operaciones con matrices de gran tamaño y trabajar con otros conceptos como determinantes, autovalores, polinomios característicos, ortogonalización, etc, lo que lo hace muy útil para resolver problemas de Álgebra Lineal.

La aplicación de programas de aprendizaje interactivo en los cursos de Álgebra permite al estudiante experimentar con los objetos matemáticos y sus propiedades, hacer conjeturas y descubrir por sí mismo resultados importantes, todo lo cual refuerza la comprensión intuitiva de los conceptos e incentiva la creatividad.

Dorier y Sierpinska (2001) señalan, en un trabajo dedicado a estudios universitarios, que el currículo del Álgebra Lineal ha cambiado en muchos países (Francia, Polonia o Marruecos), pasando de ser una enseñanza muy teórica a darle importancia a cálculos numéricos. Consideran que hay que aceptar que esta materia resulta difícil a la mayoría de los alumnos, por dos razones fundamentales: la naturaleza misma del Álgebra Lineal (dificultades conceptuales) y la clase de pensamiento requerido para entender el Álgebra Lineal (dificultades cognitivas). Muchas veces ambas dificultades son indistinguibles. El estudio del Álgebra Lineal está asociada al uso del "lenguaje formal": las dificultades de los estudiantes con el aspecto formal de la teoría de los espacios vectoriales no es sólo un problema general con el formalismo sino principalmente una dificultad de entender el uso específico del formalismo dentro de esta teoría y la interpretación de los conceptos formales en relación con los contextos más intuitivos como el geométrico o sistemas de ecuaciones lineales en que ellos surgieron históricamente. Varios estudios de diagnóstico dirigidos por Dorier, Robert, Robinet y Rogalski entre 1987 y 1994 apuntaron a un solo obstáculo fuerte que aparece en todas las sucesivas generaciones de estudiantes y para casi todos los modos de enseñar, a saber, lo que los de autores llaman el *obstáculo del formalismo.*

Los autores consideran que enseñar Álgebra Lineal equivale a unificar y generalizar conceptos asociados a elementos que el alumno ya conocía de cursos anteriores. Estos elementos necesitan ser integrados dentro de un proceso de abstracción, para lo cual es necesario identificar sus características comunes. Desde un punto de vista didáctico, la dificultad surge porque cualquier problema lineal en el primer año de unos estudios universitarios puede ser resuelto sin usar una teoría axiomática. La ventaja en términos de unificación, generalización y simplificación es sólo vista por el experto. Los autores plantean dos alternativas: una posible solución sería abandonar la enseñanza de una teoría formal de espacios vectoriales; la otra, sería inducir una reflexión utilizando sus conocimientos previos e introduciendo "meta-actividades" que les hagan pensar en el uso de nuevos conceptos dentro de un contexto matemático concreto.

Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (2000) estudian la enseñanza del Álgebra en el primer año de universidad en Francia y las principales dificultades que los estudiantes tienen en esta materia. Los espacios vectoriales han desaparecido de la educación secundaria, y, en general, la enseñanza es menos formal. No se estudian determinantes ni la regla de Cramer, resolviéndose los sistemas de ecuaciones por el método de Gauss.

Los espacios vectoriales se plantean en el primer año de los estudios universitarios de ciencias y su estudio ocupa aproximadamente un tercio del temario. Tradicionalmente, estas enseñanzas comienzan con la definición axiomática de esta estructura y acaba con la diagonalización de operadores lineales. En vista de las dificultades presentadas por los alumnos para entender los conceptos presentados, los autores diseñaron un instrumento de enseñanza basado en el estudio histórico del Álgebra Lineal.

La teoría de espacios vectoriales es usada sobre todo a partir de 1930 y tiene éxito porque es una manera de unificar diferentes métodos y herramientas usados en distintos contextos y generalizándolos. Sin embargo, el principiante no ve esta simplificación, por lo que es difícil motivar el aprendizaje de esta teoría.

Los autores toman como hipótesis que la enseñanza del Álgebra debe utilizar un largo periodo de tiempo, usando lo que ya saben los estudiantes para así poder generalizarlo y llevárlos a un cambio de punto de vista sobre los objetos que ya conocen. Experimentan este tipo de instrucción durante seis años con aproximadamente 200 alumnos.

Hillel (2000) distingue tres lenguajes básicos usados en el Álgebra Lineal:

-El "lenguaje abstracto" el idioma de la teoría general abstracta incluye el espacio-vectorial, dimensión, las transformaciones lineales de espacios vectoriales, la teoría general del valor propio, etc.

-El "lenguaje algebraico" el idioma de la teoría de R^n, incluye las n-uplas, matrices, rango, la solución de sistemas de ecuaciones lineales, etc.

-El "lenguaje geométrico" el idioma de los espacios de dos y tres dimensiones que incluyen los segmentos de línea dirigidos, los puntos, las rectas, los planos, las transformaciones de figuras geométricas.

Hillel postula dejar de enseñar la teoría formal de los espacios vectoriales cuestionando el sentido de introducirla en un curso de Álgebra Lineal para estudiantes subgraduados, sólo para mostrar el isomorfismo entre cualquier espacio vectorial n-dimensional y el espacio R^n, y entonces trabajar con espacios de dimensión finita la mayoría del tiempo. Desde un punto de vista didáctico, el problema es que cualquier problema lineal dentro del alcance de un estudiante universitario de primer año puede resolverse sin usar la teoría axiomática. La ganancia por lo que se refiere a la unificación, la generalización y simplificación traídas por el uso de la teoría formal sólo es visible al experto. Sin embargo, muchas personas encuentran importante que los estudiantes que empiezan matemática universitaria y estudios de la ciencia tengan alguna idea sobre las estructuras algebraicas axiomáticas donde el espacio vectorial es uno de los más fundamentales. Para alcanzar esta meta, la cuestión del formalismo no puede evitarse. Por consiguiente, los estudiantes tienen que enfrentarse a un cierto tipo de reflexión en el uso de sus conocimientos y competencias anteriores en relación con los nuevos conceptos formales. Esto llevó Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (2000) a introducir lo que ellos llamaron actividades "meta lever". Con la palabra "meta" ellos se refieren a armar actividades a través de las cuales se espera una actitud reflexiva en las tareas matemáticas del estudiante y con "lever" apuntan hacia algo que tiene que ser usado en el momento adecuado, en el lugar preciso, para ayudar al estudiante a entrar en esta actitud reflexiva mientras va realizando una tarea matemática que se ha preparado cuidadosamente.

Pavlopoulou (1993) y Hillel (2001) muestran la importancia, en el entendimiento del Álgebra Lineal, de las habilidades de traducir de un registro o lenguaje a otro. En su trabajo, Pavlopoulou aplicó y probó la teoría de Duval (1995) en este contexto. Ella distinguió entre tres registros de representación semióticos de vectores:

-*registro gráfico* (las flechas),

-*registro por tabla* (las columnas de coordenadas), y

-*registro simbólico* (la teoría axiomática de los espacios vectoriales).

Identificó varios errores de los estudiantes que podrían interpretarse como una confusión entre un objeto y su representación (sobre todo un vector y su representación geométrica) o como una dificultad de conversión de un registro a otro.

Hillel y Sierpinska (1994), enfatizaron que un curso de Álgebra Lineal que es más teórico que computacional requiere de un nivel de pensamiento que esta basado en lo que ha sido llamado por Piaget y García como el "nivel trans-objeto de análisis" que consiste en construir estructuras conceptuales de lo que, en niveles anteriores, eran objetos individuales, las acciones sobre estos objetos, y transformaciones de ambos (los objetos y las acciones). Una afirmación similar hizo Harel (2000), en sus aserciones que un sustancial rango de procesos mentales debe encapsularse en objetos conceptuales cuando los estudiantes consiguen estudiar el Álgebra Lineal. En particular, las funciones no deben ser sólo reglas para producir números de otros números sino objetos en sí mismos, que pueden sumarse, pueden multiplicarse por escalares, y pueden combinarse.

Robert, Robinet y Tenaud (1987) diseñaron y experimentaron con una entrada geométrica al Álgebra Lineal. El objetivo era superar el obstáculo del formalismo dando un significado más ''concreto" a los conceptos de Álgebra Lineal, en particular, a través de figuras geométricas que podrían usarse como las metáforas para las situaciones lineales generales en los espacios vectoriales más complejos. Sin embargo, al igual que en el estudio de Harel, la conexión con la geometría demostró ser problemática. Primeramente, la geometría se limita a tres dimensiones, por consiguiente, algunos conceptos como el rango, por ejemplo, o incluso la dependencia lineal, tienen un campo bastante limitado de representación en el contexto geométrico.

Gueudet-Chartier (2000) mostró que el uso de la geometría como una entrada privilegiada al Álgebra Lineal debe ser cuidadosamente planeado. En su trabajo, hizo un estudio epistemológico de la conexión entre ambas disciplinas, usando la evidencia de los textos históricos y modernos. Uno de sus metas principales era caracterizar lo que significa la intuición geométrica, en la relación con el Álgebra Lineal, para varios autores. En la segunda parte de su trabajo, se interesó en el aspecto didáctico de la cuestión. Analizó varios libros de texto de diferentes países y períodos diferentes y diseñó encuestas para profesores y estudiantes en varios niveles de la universidad. Encontró que la necesidad de la intuición geométrica es muy a menudo postulada por libros de texto o profesores al enseñar el Álgebra Lineal, pero sin embargo, en la realidad, el uso de geometría era con frecuencia muy superficial.

Miranda (2004), en un diseño experimental con estudiantes de 1º curso de Ingeniería, se propone encontrar algunos modelos de enseñanza-aprendizaje de conceptos tales como: vectores, combinaciones lineales, independencia lineal, bases o transformaciones lineales. Para ello diseña secuencias de aprendizaje donde articula el lenguaje geométrico con el algebraico buscando que el estudiante se apoye en figuras geométricas en R^2 o en R^3 (en forma inicial) para que junto con la definición formal del concepto referido pueda demostrar sus propiedades o encontrar contraejemplos apropiados. Su objetivo es que una vez que el alumno pueda decidir, mediante la visualización, entonces deberá adquirir práctica algebraica para que pueda formalizar con símbolos lo que pudo intuir visualmente. La etapa final se considera cuando el estudiante pueda demostrar en forma generalizada y algebraica, sin recurrir a figuras geométricas, las propiedades del concepto estudiado, para, de este modo, se pase al pensamiento analítico. La estructura del modelo de enseñanza no supone seguir una estructura lineal ya que en cada etapa puede haber retrocesos en donde hay que volver a revisar conceptos estudiados en etapas anteriores.

La metodología elegida para encontrar los modelos de enseñanza es la siguiente:
- Análisis inicial del concepto a enseñar.
- Recolección de datos.
- Rediseño del modelo de enseñanza.

A través del análisis de las entrevistas a dos estudiantes concluye que ambos tienen suficiente dominio de las propiedades de una transformación lineal, entre otras cosas, lo que les permite pensar analíticamente, y en forma correcta, la solución del problema que les propone. Respecto a los otros estudiantes que no se entrevistaron, Miranda señala que se les puede clasificar al menos en el tipo de pensamiento aritmético – analítico, ya que mostraron habilidad algebraica para resolver los problemas correctamente.

Ortega (2002) considera que la *algebraización* de las Matemáticas, es decir, la influencia de las ideas y los métodos del Álgebra en las Matemáticas son algunas de las características que configuran la matemática actual. El Álgebra Lineal es una disciplina que basa gran parte de su contenido en la forma de las expresiones aritméticas, expresiones simbólicas que mediatizan un conocimiento más abstracto. Se trata por tanto de una disciplina que goza de un elevado grado de abstracción, en la que existe una cierta mediación semiótica del conocimiento. Por otro lado, ese formalismo presente en el

Álgebra Lineal es quizás el causante de un obstáculo muy frecuente que causa una de las principales dificultades para la enseñanza y aprendizaje de esta área de conocimiento.

Sierpinska, Dreyfus y Hillel (1999) presentan un trabajo cuyo objetivo es responder a las dificultades de los estudiantes en los cursos de Álgebra Lineal en el primer año universitario. Se intentan aclarar las nociones de espacio vectorial, transformación lineal y vector propio usando la intuición geométrica y apoyándose en el programa Cabri.

El experimento se llevó a cabo en tres etapas a lo largo de los años 1997 y 1998, y los autores destacan, ya en la introducción, la disparidad entre sus propias interpretaciones de las representaciones del Cabri y las de los estudiantes. El foco del análisis de este trabajo fueron precisamente estas interpretaciones.

La queja más común de los estudiantes es que el Álgebra Lineal es lo más abstracto que habían estudiado en matemáticas. El obstáculo del formalismo se manifiesta en estudiantes que operan con expresiones sin verlas referidas a algo más que ellas mismas. Por tanto, los autores se decidieron a presentar los conceptos de forma geométrica usando Cabri. Así, por ejemplo, se introduce un espacio vectorial de dos dimensiones donde los vectores son posiciones de puntos con respecto a un punto fijo llamado origen y donde para describir la posición de un punto sólo se necesitan dos direcciones independientes orientadas y unidades en cada dirección.

Las premisas básicas de los autores son que todo conocimiento sólo puede existir en forma de signos pero que estos símbolos representan objetos que no son signos. Por ello el avance en el conocimiento teórico depende fuertemente de las actividades de identificación de objetos bajo diferentes representaciones y la discriminación entre objetos que pueden ser confundidos bajo representaciones similares.

La interpretación de la representación puede a veces ser considerada como un *concepto* del objeto. Por ello, como hay varias representaciones de los objetos matemáticos, hay varios conceptos de dichos objetos. Un objeto matemático se construye identificando lo que es invariante en varias interpretaciones.

Los autores llegan a la conclusión de que en los primeros niveles universitarios ciertas nociones parecen a los estudiantes símbolos sin significado.

Costa y Catarino (2007) ponen de manifiesto las dificultades de comprensión del concepto de dependencia lineal, identificando algunas razones para explicar estas dificultades, que tienen que ver con discontinuidades didácticas en las relaciones entre el concepto de colinearidad y el de dependencia lineal en la transición entre la enseñanza secundaria y la superior, clasificando las discontinuidades en: a) secuenciación histórica; b) simbolismo, y c) implementación geométrica y algebraica.

Kü *et al.* (2008), mediante una descomposición genética del concepto de base de un espacio vectorial siguiendo la teoría APOE (acción-procesos-objeto-esquema), los señalan que a los estudiantes les resulta más fácil averiguar si un conjunto de vectores forma una base de un espacio vectorial, que construir ellos mismos una base para un espacio vectorial dado. Indican que:

Averiguar si un conjunto dado es base requiere comprobar ciertas condiciones, lo cual puede hacerse, utilizando únicamente acciones, por ejemplo siguiendo un algoritmo. Por otro lado, hallar una base para un espacio vectorial requiere la coordinación de los procesos involucrados en la comprensión de la independencia lineal y el conjunto generador. [..] resulta muy difícil alcanzar una concepción-objeto del concepto de base, dado que, según la teoría, cuando hay necesidad de aplicar acciones sobre un proceso ya construido, éste se encapsula en un objeto. Estas acciones pueden consistir en, por ejemplo, la comparación de conjuntos y sus propiedades para averiguar si constituyen bases para algún espacio vectorial dado, o cambiar de base para resolver un problema que así lo requiere. Creemos que un estudiante puede lograr una concepción objeto del concepto de base sin trabajar necesariamente otros espacios que R^n; sin embargo, la experiencia de reflexionar sobre diferentes espacios vectoriales enriquece las conexiones que se deben establecer para la construcción de un esquema (p. 86)

Roa-Fuentes y Oktac (2010) plantean una descripción detallada sobre la forma de construir una descomposición genética del objeto transformación lineal, basándose en la teoría APOE. Este análisis les permite describir dos caminos para construir dicho concepto, determinados por dos mecanismos mentales diferentes: coordinación e interiorización. El primer camino está determinado por el objeto transformación como un elemento del esquema de función. La desencapsulación de este objeto le permite a un individuo pensar en el proceso que lo generó: *una función definida entre espacios vectoriales* que, al coordinarse con el proceso de operación binaria (suma vectorial o producto por un escalar), genera un nuevo proceso que hace que el individuo piense en una función entre espacios vectoriales que preserva una operación. El segundo camino de construcción está determinado por acciones específicas que un individuo puede realizar sobre vectores particulares de un espacio vectorial, al transformarlos bajo una función dada. Este camino permite la interiorización de las acciones cuando el individuo considera el cumplimiento de las propiedades (suma vectorial o producto por un escalar) para todos los elementos del espacio vectorial.

3.4- *Aspectos Curriculares*.

Veremos en este apartado desde qué óptica contempla el currículo de matemáticas de bachillerato el estudio escolar del Álgebra Lineal. En primer lugar, estudiaremos cómo se presentan en los cuestionarios oficiales los contenidos correspondientes a esta disciplina y la resolución de ecuaciones en los últimos cincuenta años en España, aunque los últimos cuestionarios analizados sólo corresponden a Galicia, por estar transferidas las competencias en materia de educación. Se verá cómo se presentan estos conceptos en el antiguo Bachillerato, el BUP y COU (Ley de 1970) y la ESO y el Bachillerato actual LOGSE, y en el nuevo Bachillerato LOE.

Posteriormente, realizaremos un análisis de la progresión de estos saberes a enseñar, así como la información que facilitan a los profesores. Los cambios sufridos en los currículos oficiales se suelen ver, a veces, como meras reformas superficiales, pero provocan transformaciones profundas que, en numerosas ocasiones, permanecen opacas tanto en los manuales escolares como en el discurso del profesor en el aula.

Analizaremos el tratamiento que dan los programas oficiales al Álgebra Lineal, entendiendo por ello el estudio de los aspectos relacionados con los diferentes objetos propuestos para su estudio y las distintas situaciones que le dan sentido.

Estudiaremos el proceso de adaptación de esta organización matemática a las exigencias fundamentales que precisa todo saber que se desee figure en un proceso de instrucción:

- la exigencia de dividirlo en campo de saber delimitados, originando prácticas específicas.
- la exigencia de definir una progresión ordenada en el tiempo para el saber a enseñar, lo cual implica una programación secuencial del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- la exigencia de que esta progresión sea controlada socialmente por los programas oficiales y además que sea lógica, es decir, vigilada desde el punto de vista epistemológico.

3.4.1. Cuestionarios De Bachillerato (1954).(B.O. del MEN, 10/2/54, p.16-20)

Este Bachillerato constaba de seis cursos académicos en los que el alumno comenzaba a los 10/11 años y terminaba a los 16/17. Podríamos decir que correspondía en la actualidad a los cursos que comprenden desde 5º-6º de Primaria hasta 1º de Bachillerato, ambos incluidos. El Álgebra se introduce en el 3º curso.

TERCER CURSO

- Ecuaciones: su equivalencia. Ecuaciones de primer grado. Sistemas de ecuaciones: sus equivalencias. Sistemas de dos o de tres ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas

- Resolución gráfica de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

CUARTO CURSO

- Ecuación de segundo grado.

- Resolución de un sistema de dos ecuaciones, una de primer grado y otra de segundo, con dos incógnitas.

- Determinación de un plano. Intersección de dos planos. Posiciones de recta y plano y de dos rectas en el espacio.

Con respecto a este último punto, las escasas orientaciones metodológicas facilitadas dicen lo siguiente: "*Es indispensable insistir sobre los conceptos primarios de perpendicularidad y paralelismo en el espacio, multiplicando el uso de modelos corpóreos con los que el alumno se vaya acostumbrando a ver en el espacio. Cuanto más objetivos sean los razonamientos, tanto mejor se prepara el alumno para un ulterior estudio abstracto de la Geometría pura.*"

QUINTO CURSO

- Sistemas de dos o tres ecuaciones lineales determinados, indeterminados o imposibles (Es potestativo aplicar los determinantes a esta teoría).

Orientaciones metodológicas: *Se insiste en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales determinados, indeterminados o imposibles, dejando en libertad al profesor* *para abordar dicho estudio por determinantes, pudiendo llegar hasta el teorema de Rouché-Frobenius.*

SEXTO CURSO

- Estudio completo de la ecuación de segundo grado.

3.4.2. Cuestionarios de Bachillerato (1967). (B.O. del MEC, 5/10/67, p. 2429-2431)

En este año se produce un cambio en el currículo del Bachillerato elemental, correspondiente a los cuatro primeros cursos. Nuevamente el Álgebra y la resolución de ecuaciones se introducen en el tercer año.

Como novedad respecto al anterior cuestionario hay que mencionar que, aparte de presentar orientaciones metodológicas para cada curso, también hay unas pautas de carácter general en las que aparece por primera vez una referencia a situaciones prácticas:

- Conjugar al mismo tiempo el valor formativo de las enseñanzas con las aplicaciones prácticas.

TERCER CURSO

- Noción de ecuación. Resolución de ecuaciones lineales con una incógnita.

- Ecuaciones con dos incógnitas. Sistemas sencillos de dos ecuaciones lineales.

- Resolución de problemas lineales relativos a cuestiones de la vida práctica: porcentajes, interés, descuento comercial, repartos proporcionales, mezclas.

Orientaciones metodológicas: *En el estudio de las ecuaciones y sistemas lineales se pondrá de manifiesto que la posibilidad de su resolución depende y utiliza únicamente las propiedades del cuerpo de los números racionales.*

CUARTO CURSO

- Ecuación de segundo grado. Radicales cuadráticos.

- Problemas de segundo grado.

- Posiciones relativas de rectas y planos en el espacio. Estudio intuitivo de las relaciones de perpendicularidad y paralelismo.

3.4.3. Cuestionarios de BUP (1975). (B.O.E., 18/4/75, p. 8064-8065)

PRIMER CURSO

- Resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas.

SEGUNDO CURSO

- Vectores en el plano y en el espacio. Estructura de espacio vectorial.

Este segundo curso es de iniciación al análisis y la Geometría. Con este fin se estudian: (...)

La estructura fundamental de espacio vectorial y la de espacio afín, en el caso de dos y tres dimensiones.

3.4.4. Cuestionarios de COU (1978). (B.O.E., 17/3/78, p. 6449-6450)

- Sistemas de ecuaciones lineales. Discusión.

El objetivo de este tema es capacitar al alumno para discutir y resolver, en su caso, sistemas de ecuaciones de primer grado de igual o diferente número de ecuaciones que de incógnitas.

En la práctica podrá limitarse a un número de ecuaciones no superior a cuatro y hasta cinco incógnitas. Al propio tiempo el alumno se ejercitará en problemas de eliminación de parámetros.

Las diferentes especialidades a las que puede acceder el alumno de COU (piénsense en los estudios de Matemáticas, Ciencias experimentales o Ingeniería), aconseja que la enseñanza de este curso sea adecuada a esta diversidad de fines. Por ello, se estima que se debe partir, tanto como sea posible, de situaciones experimentales.

3.4.5. Cuestionarios de COU (1988). (B.O.E., 29/1/88, p. 3121-3123)

En este año se incorpora la asignatura Matemáticas II a las opciones C y D del antiguo COU, orientadas a todos aquellos estudios que tengan que ver con las Ciencias Sociales. Sus contenidos son:

- Sistemas lineales: planteamiento de problemas lineales; método de Gauss; interpretación de las soluciones; significado geométrico de los sistemas lineales.

- Cálculo matricial: matrices; determinantes.

Encontramos una referencia a la resolución de problemas prácticos en el siguiente párrafo:

Debe insistirse en problemas de planteamiento sacados de diversos ámbitos y, en particular, de las áreas de mayor interés para los alumnos, procurando que los distintos tipos de sistemas que puedan plantearse (determinados, indeterminados e incompatibles), adquieran todo su significado al ser interpretados en un texto.

3.4.6. Cuestionarios de ESO y Bachillerato (2002). (D.O.G., 17/7/2002, p. 11268-11273 y D.O.G., 15/7/2002, p. 11002-11005 y p. 11023-11026)

Como objetivo general de la ESO aparece:

Resolver problemas matemáticos, sabiendo identificar todos los conceptos, procedimientos y recursos desde la intuición hasta los algoritmos, y a poder ser empleando estrategias diferentes.

2º ESO

Contenidos

- Interpretación de fórmulas y expresiones algebraicas. Ecuaciones de 1º grado. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Criterios de evaluación

- Simbolizar y resolver problemas sencillos utilizando métodos numéricos, gráficos o algebraicos, cuando se basan en la aplicación de fórmulas conocidas o en la resolución de ecuaciones sencillas de 1º grado

3º ESO

Contenidos

- Resolución algebraica de ecuaciones de 1º grado y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Ecuaciones de 2º grado.

Criterios de evaluación

- Utilizar las técnicas y procedimientos básicos del cálculo algebraico para (...) resolver ecuaciones de 1º y 2º grado (factorización de polinomios) y sistemas sencillos de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

4º ESO

Contenidos

- *Ecuaciones de 1º y 2º grado. Sistemas de ecuaciones lineales y de 2º grado.*

Criterios de evaluación

- *Resolver problemas sencillos utilizando métodos numéricos, gráficos o algebraicos, cuando se basen en la utilización de fórmulas conocidas o en la presentación y resolución de ecuaciones de 1º y 2º grado, o de sistemas sencillos de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.*

En la asignatura de Matemáticas, en Bachillerato, se plantea como objetivo general:

Adaptar los conocimientos matemáticos en la resolución de problemas, comprobando y discutiendo las soluciones obtenidas.

1º curso

Contenidos

- *Resolución e interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones de 1º y 2º grado.*
- *Aplicación del método de Gauss en la resolución e interpretación de sistemas sencillos de ecuaciones lineales.*

Criterios de evaluación

- *Transcribir a lenguaje algebraico problemas reales, utilizando las técnicas apropiadas a cada caso, para buscar e interpretar las respectivas soluciones.*

2º curso

Contenidos

- *Matrices de números reales. Operaciones con matrices: suma y producto de matrices, producto por un número. Matriz inversa.*
- *Determinantes. Cálculo de determinantes de órdenes 2 y 3 mediante la regla de Sarrus. Propiedades elementales de los determinantes.*
- *Rango de una matriz: obtención por el método de Gauss.*
- *Sistemas de ecuaciones lineales. Representación matricial de un sistema. Discusión y resolución por el método de Gauss. Utilización de los determinantes en la discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales: Teorema de Rouché-Fröbenius y Regla de Cramer.*

Criterios de evaluación

- Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices y determinantes como instrumento para representar e interpretar datos y relaciones, y resolver ecuaciones que se presentan habitualmente en problemas relacionados con la organización de datos y la geometría analítica.

En la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales se plantea como objetivo general:

Utilizar y contrastar distintas estrategias en la resolución de problemas comprobando, interpretando y discutiendo las soluciones obtenidas.

1º curso

Contenidos

- Interpretación y resolución gráfica y algebraica de ecuaciones de 1º y 2º grado.

- Interpretación y resolución gráfica y algebraica de sistemas lineales de ecuaciones con dos incógnitas.

- Interpretación y resolución gráfica de inecuaciones lineales con una o dos incógnitas.

2º curso

Contenidos

- La matriz como expresión de tablas y gráficos. Producto de un número por una matriz. Suma y producto de matrices.

- Obtención de matrices inversas sencillas por el método de Gauss.

- Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones matriciales sencillos. Utilización del método de Gauss en la discusión y resolución de un sistema de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas.

- Resolución de problemas con enunciados relativos a las ciencias sociales y a la economía que puedan resolverse mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas.

- Interpretación y resolución gráfica de inecuaciones y sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas. Iniciación a la programación lineal bidimiensional.

Actitudes

- Reconocimiento de la necesidad de incorporación del lenguaje algebraico y de sus mecanismos ante las necesidades presentadas por las ciencias sociales, incidiendo en su precisión y simplicidad para el estudio de fenómenos diversos.

- Valoración de la utilidad de las matrices como instrumento para representar conjuntos de datos estructurados, y otras herramientas que proporciona el Álgebra Lineal para comunicar y resolver distintas situaciones y problemas de las ciencias sociales.

Criterios de evaluación

- Utilizar las matrices para organizar y codificar informaciones; operar con matrices e interpretar los resultados obtenidos.

- Emplear el método de Gauss para calcular las inversas de matrices cuadradas (órdenes 2 y 3) y para discutir y resolver, si procede, sistemas lineales con 2 y 3 incógnitas.

- Expresar en lenguaje algebraico problemas de ámbito cotidiano (sobre todo económico y social) con la ayuda de los instrumentos algebraicos (matrices, sistemas lineales, programación lineal en el plano…).

3.4.7. Cuestionarios de ESO y Bachillerato (2007). (D.O.G., 13/7/2007, p. 12144-12160 y B.O.E., 6/11/2007, p. 45448-45451 y p. 45474-45477)

1º ESO

- Empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos. Simbolización para expresar cantidades en distintos contextos, valorando su utilidad.

- Traducción de expresiones de lenguaje cotidiano a algebraico y viceversa. Búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades en secuencias numéricas.

- Obtención de valores numéricos en fórmulas sencillas.

2º ESO

- Paso de lenguaje verbal a lenguaje algebraico y viceversa. El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones en contextos diversos.

- Obtención del valor numérico de una expresión algebraica.

- Significado de las ecuaciones y de las soluciones de una ecuación.

- Resolución de ecuaciones de primer grado. Transformación de ecuaciones en otras equivalentes. Interpretación de la solución.

- Utilización de las ecuaciones para la resolución de problemas.

3º ESO

- Traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico y viceversa. Identidades y ecuaciones.

- Transformación de expresiones algebraicas.

- Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

- Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones, sistemas y otros métodos personales.

4º ESO

- Resolución gráfica y algebraica de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. Resolución de problemas cotidianos e de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.

El Real Decreto 1467/2007 del 2 de noviembre (BOE del 6 de noviembre) establece las nuevas enseñanzas del Bachillerato que tendrán que ser desarrolladas por las distintas comunidades autónomas.

En las asignaturas de Matemáticas I y II, la introducción a la nueva ley menciona que las matemáticas en el Bachillerato de Ciencias y Tecnología deben girar en torno a dos ejes fundamentales: la geometría y el análisis, quedando el Álgebra y las técnicas de resolución de problemas como herramientas de apoyo de estas disciplinas. También se indica que la resolución de problemas tendrá carácter transversal y será objeto de estudio relacionado e integrado en el resto de los contenidos.

Relacionados con el Álgebra Lineal en la asignatura de Matemáticas I tenemos:

Contenidos:

- Resolución e interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones.

- Utilización de las herramientas algebraicas en la resolución de problemas.

En la asignatura de Matemáticas II:

Contenidos:

- Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos.
- Operaciones con matrices. Aplicaciones de las operaciones y sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales.
- Determinantes. Propiedades de los determinantes. Rango de una matriz.
- Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Criterios de evaluación:

- Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices y determinantes como instrumento para representar e interpretar datos y relaciones y, en general, para resolver situaciones diversas.

En cuanto a la opción de Ciencias Sociales, el decreto dice lo siguiente para la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I:

Contenidos:

- Resolución de problemas del ámbito de las ciencias sociales mediante la utilización de ecuaciones o sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss.

En el segundo curso:

Contenidos:

- Las matrices como expresión de tablas y grafos. Suma y producto de matrices. Interpretación del significado de las operaciones con matrices en la resolución de problemas extraídos de las ciencias sociales.

Criterios de evaluación:

- Utilizar el lenguaje matricial y aplicar las operaciones con matrices como instrumento para el tratamiento de situaciones que manejen datos estructurados en forma de tabla o grafos.

- Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebaico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas: matrices, ecuaciones y programación lineal bidimensional, interpretando críticamente el significado de las soluciones obtenidas.

3.4.8. Secuenciación que determinan en el aprendizaje.

Para comenzar este análisis hemos de decir que el Álgebra se introduce más o menos en el mismo nivel en todos los planes de estudios: tercer curso en el Bachillerato antiguo, 1º de BUP o 2º de ESO, aunque el nuevo plan de 2007 la adelanta hasta 1º ESO. La forma de comenzar también es similar en todos los curriculos: ecuaciones de primer grado y sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, con la excepción otra vez del plan de 2007, en el que se introduce el Álgebra únicamente familiarizando al alumno con el empleo de letras en lugar de números.

Sólo en el antiguo Bachillerato se hace mención en este nivel a los sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas. Además, tanto en el plan de estudios del antiguo Bachillerato como en el de la ESO se hace referencia a la resolución de sistemas por métodos gráficos.

La ecuación de segundo grado se introduce exactamente en el mismo año para todos los planes de estudio: cuarto curso de Bachillerato, 1º de BUP y 3º ESO.

En el cuarto curso de Bachillerato se menciona el estudio de posiciones relativas en el espacio de recta y plano, tanto en el plan presentado en 1954 como en el de 1967. Sin embargo, las orientaciones metodológicas hablan de un enfoque intuitivo. Recordemos que en los siguientes planes de estudio estas posiciones relativas se presentan en el último año: COU o 2º de Bachillerato, y que en su estudio intervienen las matrices y determinantes. Se entiende por tanto que el estudio propuesto en el cuarto curso de Bachillerato no es un estudio analítico.

Las matrices no se mencionan en ningún momento en el Bachillerato de 1954 ni en el de 1967, pero en el primero de ellos se sobreentiende su uso ya que en el estudio de sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas (quinto curso) es potestativo el uso de determinantes y se permite al profesor utilizar el teorema de Rouché-Frobenius. Al cambiar en el plan de 1967 únicamente el Bachillerato elemental se da por hecho que el temario del quinto curso queda intacto.

En el plan de 1967 se menciona por primera vez la necesidad de conjugar los contenidos aprendidos teóricamente con las situaciones prácticas. Este es el primer paso para intentar contextualizar las matemáticas y darles un sentido fuera del aula. A partir de aquí todos los planes de estudio presentan esta referencia.

Realmente en el plan de estudios de COU de 1978 no se menciona el estudio de las matrices o determinantes, aunque veremos en capítulos posteriores, donde se analizan libros de texto de este nivel que el bloque de Álgebra Lineal comienza con la estructura de espacio vectorial, matrices y determinantes antes de pasar a los sistemas de ecuaciones lineales. Sólo son estos últimos los que aparecen en el plan de estudios de COU de 1978, mientras que los espacios vectoriales se encuentran en la programación de 2º de BUP de 1975. Sin embargo, en 1988, cuando se presenta la programación para Matemáticas II de COU ya aparecen las matrices y determinantes en el currículo.

Nuevamente hay referencias a la importancia de partir de situaciones prácticas y experimentales para dotar de sentido a los contenidos estudiados, pero sigue sin mencionarse la resolución de problemas. Se insiste, a la hora de estudiar el Álgebra Lineal, en problemas de planteamiento sacados de diversos ámbitos procurando que los distintos tipos de ecuaciones que puedan plantearse adquieran todo su significado al ser interpretados en un contexto.

El plan de 2002 presenta una forma mucho más elaborada en el sentido de que se presentan los contenidos junto con unos objetivos, actitudes y criterios de evaluación. Por primera vez aparece como un objetivo de la enseñanza la resolución de problemas matemáticos y los contenidos aparecen mucho más desglosados dejando más claro que es lo que hay que estudiar en cada nivel.

En cuanto al plan de estudio de 2007, hay que mencionar que el Álgebra aparece como un instrumento para el estudio de la geometría y el análisis, siendo estas dos disciplinas las que priman sobre las demás partes de la asignatura. Se busca que el alumno "sepa hacer matemáticas" y no de que memorice fórmulas, partiendo siempre de una situación de resolución de problemas. Quizás lo más novedoso de este nuevo plan a la hora de hablar de 2º de Bachillerato, en la especialidad de Ciencias Sociales, es que el estudio de matrices no lleva acompañado un estudio de determinantes, como ya sucedía en el plan de 2002, pero tampoco un estudio de sistemas de ecuaciones lineales, los cuales se estudian el curso anterior, pero sólo su resolución. Sin embargo este estudio se sobreentiende en los criterios de evaluación.

Como consecuencia de este análisis podemos señalar:

1- La resolución de problemas matemáticos no parece una prioridad en los anteriores planes de estudios, aunque sí lo es para el actual.

2- El estudio de espacios vectoriales sólo se presenta como contenido en el BUP y COU, sistema que en general concedía mucha importancia a las diferentes estructuras matemáticas, pero no en el antiguo Bachillerato ni en el actual sistema.

3- El estudio de matrices y determinantes se sobreentiende en el Bachillerato antiguo y en el COU, mientras que está especificado en el Bachillerato LOGSE. Los planes de estudio han ido tendiendo a agrupar los contenidos matemáticos por bloques (Álgebra, Geometría, Análisis), excepto quizás el de BUP de 1975, cuya prioridad fue agrupar los cursos según las diferentes estructuras algebraicas.

4- En general, los planes de estudio más antiguos (sobre todo el de COU, 1978) son poco detallados. Por ejemplo, no se menciona la dependencia e independencia lineal, aplicaciones lineales, matrices, determinantes, etc.

5- En el antiguo Bachillerato el estudio de matrices y determinantes parece que sólo es una herramienta para la resolución de sistemas de ecuaciones, sin presentar un estudio propio. Parece que en el plan de estudios de COU (1975) también es así, aunque, como veremos en el capítulo 5, donde se analiza un libro de texto de COU, en realidad esto no es así, encontrando una brecha importante entre lo que señala el currículo oficial y lo que realmente constituye el significado pretendido en el aula. En el currículo actual sí que se consideran las matrices y determinantes como contenidos con entidad propia, aunque con una transposición didáctica muy particular.

6- Los currículos han ido tendiendo a presentar los contenidos agrupados en campos de saberes cada vez más delimitados, lo que da lugar a prácticas de aprendizaje especializadas. Esto parece, en principio, una contradicción con la importacia dada a la resolución de problemas, que requerirá aplicar conocimientos de diferentes partes del currículo.

7- La forma de presentar los contenidos en los currículos, sobre todo en los más modernos, es: matrices, determinantes, rango y sistemas de ecuaciones, lo que no se corresponde con la forma de presentarlos que tienen los manuales de Álgebra Lineal.

8- Una parte importante de un concepto son todas aquellas situaciones que forman parte de su significado. Los currículos hablan de estas situaciones de una forma muy general, usando términos como *situaciones experimentales, problemas prácticos, traducción de situaciones reales*. Las únicas situaciones que pueden dotar de significado y que aparecen explícitamente son los sistemas de ecuaciones lineales y la geometría del espacio y sólo el plan de 1967 (referido al Bachillerato Elemental y, por tanto, sin englobar matrices y determinantes) menciona diversas situaciones prácticas: *porcentaje, interés, descuento comercial, repartos proporcionales, mezclas*.

9- Aunque algunos planes de estudios, sobre todo los correspondientes a la LOGSE y a la LOE, presentan unos objetivos generales a alcanzar al final de la etapa, todos los currículos estudiados facilitan una organización del tiempo legal de enseñanza, indicando qué contenidos hay que estudiar en cada curso.

10- Exceptuando el plan de BUP de 1975, en el que sólo se indican qué contenidos se deben enseñar, todos los currículos indican qué hay que estudiar y cómo se debe enseñar, facilitando unas pautas metodológicas (explícita o implícitamente) al profesorado.

11- No se encuentra en la secuenciación de contenidos pautas para que se introduzcan unos conceptos basándose en otros, exceptuando en los currículos de 2002 y 2007 para Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, donde se indica que se presente la matriz como expresión de tablas y gráficos. Quedará a criterio de cada docente, por tanto, la forma de introducir los conceptos en el aula.

12- Se observa un cambio en los distintos programas a la hora de presentar los conceptos de matriz y determinante; mientras que en el plan de 1954 sólo aparecen como instrumentos para discutir sistemas de ecuaciones lineales y en otros currículos (1978) ni siquiera se nombran, en el plan de 1988 ya aparece el cálculo matricial como contenido propio, aunque sin especificar qué quiere decir el programa con "cálculo matricial". Los últimos planes de estudio (2002 y 2007) ya indican detalladamente qué se debe estudiar al abordar este cálculo matricial.

13- En ningún momento encontramos referencia al uso de demostraciones o justificaciones de los resultados presentados, ni siquiera argumentaciones informales situacionales ni razonamientos por analogía. Sin embargo, los profesores utilizan, para explicar tanto Álgebra Lineal como otras partes del currículo, argumentaciones deductivas informales y a veces no deductivas. A nuestro modo de ver enseñar a argumentar y justificar es una fase más del conocimiento matemático pese a su dificultad.

3.4.9. Informaciones que facilitan los programas oficiales a los profesores.

En general todo profesor, a partir de los currículos oficiales, no encuentra una información puntual y exhaustiva de todo el proceso de determinación y estructuración de los contenidos a enseñar. Él es quien, en última instancia, ha de tomar la decisión de precisar los significados institucional y pretendido que ha de llevar al aula para su estudio. Por supuesto estos programas son absolutamente necesarios ya que, de no existir, cada docente impartiría en el aula los contenidos que considerase correctos, lo cual sería perjudicial para el alumno si cambiase de profesor. Por tanto, estas indicaciones que presentan los currículos son de gran utilidad a la hora de decidir qué contenidos enseñar y en qué curso académico.

En general, existen diferencias en las orientaciones que ofrecen los programas oficiales a los profesores. Los de BUP son excesivamente vagos en su formulación. Los de COU son también bastante ambiguos, aunque los cuestionarios de la opción de Ciencias Sociales son algo más explícitos que los de Ciencias. Los planes LOGSE suponen una mejoría al incluir objetivos y criterios de evaluación que marcan la pauta de lo que se quiere conseguir con estas enseñanzas. Y los currículos del 2007 son una continuación de estos últimos, variando muy poco.

Un rasgo común a todos los planes de estudio es que señalan como objetivo principal proporcionar a los alumnos la posibilidad de adquisición de los conceptos y los métodos de trabajo en matemática. El currículo de la ESO especifica, más concretamente, como objetivo el resolver problemas matemáticos. Además se intenta mantener un equilibrio entre el sistema de enseñanza y el entorno más próximo al alumno.

En ninguno de los programas se explicita cómo ha de tratarse la organización del Álgebra Lineal. De hecho, en algunos de ellos, ni siquiera aparecen las matrices y determinantes como contenidos propios, sino que se utilizan como meros instrumentos de cálculo al servicio de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. En el cuestionario de Bachillerato de 1954 encontramos: *Se insiste en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales determinados, indeterminados e imposibles, dejando en libertad al Profesor para abordar dicho estudio por determinantes, pudiendo llegar hasta el Teorema de Rouché-Frobenius.*

Tampoco encontramos en ningún programa actividades modelo orientativas para los profesores.

La secuenciación de los contenidos es similar en el COU y el Bachillerato LOGSE, si exceptuamos el tema de espacios vectoriales, que no se halla presente en este último plan. Sin embargo, no podemos decir lo mismo del antiguo Bachillerato, que aborda el estudio de las posiciones relativas de rectas y planos en el espacio de manera intuitiva, no analítica, y en un curso mucho más temprano.

En general, la secuenciación de los objetivos induce a los profesores a presentar, en primer lugar, los conceptos de forma teórica, utilizando un lenguaje más o menos formal y, posteriormente aplicarlos a la resolución de ejercicios, en muy pocos casos a abordar auténticos problemas.

Destaca sobre todo la gran diferencia que hay entre los currículos de BUP y COU con los de ESO y Bachillerato LOGSE. En el primer caso no se aconseja a los profesores de manera explícita ningún tipo de metodología para el proceso de enseñanza-aprendizaje. En general, estos cuestionarios se limitan a dar una lista de contenidos y unas muy escasas orientaciones, si es que las podemos llamar así. Sin embargo, a lo largo de todos ellos se detecta, de forma implícita, la presencia de una metodología de enseñanza: "*En la práctica podrá limitarse a un número de ecuaciones no superior a cuatro y hasta cinco incógnitas. Al propio tiempo el alumno se ejercitará en problemas de eliminación de parámetros*". (B.O.E., 17/3/78)

Los programas del año 2002 tampoco ofrecen una metodología de enseñanza, pero el proceso queda más detallado al incluir objetivos y criterios de evaluación. Primero se presentan los objetivos a conseguir, después los contenidos que han de impartirse, las actitudes a valorar y, por último, los criterios de evaluación, en los que se habla principalmente de la consecución de las habilidades prácticas.

En ambos planes de estudio vemos reflejado el modelo teoría-práctica. Los conceptos aparecen en los currículos como objetos matemáticos de los cuales, en primer lugar, se estudiarán sus definiciones y propiedades y se aplicarán, posteriormente, a casos prácticos particulares.

La sucesión de diferentes programas nos presenta un fenómeno de continua renovación de contenidos, que hace que se consideren obsoletos los cuestionarios anteriores y permite relacionar el sistema de enseñanza con el entorno del alumno. Es de destacar que ninguno de los planes de estudios presentados incluye la demostración como un tipo de situación matemática a estudiar, pese a ser situaciones que ponen en juego gran variedad de conceptos matemáticos y un correcto uso del lenguaje. Tampoco se menciona la importancia de enseñar modos de razonar y de buscar contraejemplos y conjeturas, aunque se inisiste en estos programas en que el alumno ha de ser crítico con las soluciones obtenidas, comprobando que esos resultado son correctos.

3.5. *Aspectos Cognitivos*

3.5.1. Investigaciones anteriores sobre las Pruebas de Acceso a la Universidad.

Fernández (2001) señala que, ya que el currículum actual de Bachillerato prescribe como contenido la resolución de problemas, esto debe reflejarse en un cambio en el modelo de examen de PAUU. Indica que los profesores acaban haciendo siempre lo mismo, muchas veces guiados por el libro de texto o por las ideas de los centros: “sólo hay una forma de hacer matemáticas”, y, además, señala la dificultad de incorporar la resolución de problemas como contenido a impartir en el aula.

Los alumnos sólo saben lo que se les evalúa y poco de lo que no se les evalúa, por lo que no merecería la pena enseñar resolución de problemas en Bachillerato para resolver ejercicios de las PAUU.

Se propone cambiar la estructura del examen añadiendo un problema que lleve implícito investigación y que el alumno necesite decidir un plan para intentar resolverlo. La primera parte de la actividad sería accesible a todo el mundo y ayudaría a entenderla mientras que la segunda parte supondría un reto. Por ejemplo, se propone:

a) Busca un polinomio de 4º grado cuya gráfica no sea simétrica respecto de ninguna recta vertical.

b) ¿Cuáles son los polinomios de 4º grado cuya gráfica sí es simétrica respecto de alguna recta vertical?

También se modificaría el tiempo del examen y las puntuaciones.

Carrillo y Llamas (2002) presentan una reflexión sobre el uso de la calculadora gráfica en las pruebas de acceso a la universidad. Según estos autores la decisión de no permitir la calculadora en estos exámenes se toma sin analizar las ventajas e inconvenientes que conlleva su uso y la ayuda que supone para un alumno al afrontar la resolución de cualquier situación problemática.

En concreto plantean como ejemplo la resolución con calculadora gráfica de los siguientes problemas:

1- Dado el sistema $\begin{cases} x+3y+z=3 \\ 2x+my+z=m \\ 3x+5y+mz=5 \end{cases}$ *, dar un valor de m para que tenga solución única, otro para que tenga infinitas soluciones y otro para que no tenga solución.*

2- Sea la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & m-6 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores de m para que dicha matriz tenga inversa.

b) Haciendo m = 4, resuelva la ecuación XA = (3 1 1)

Estos autores afirman que la calculadora gráfica sólo resulta útil para aquellos alumnos con suficientes conocimientos matemáticos y que la ayuda que dicha máquina ofrece para realizar la prueba de acceso no es determinante para que el alumno la supere o no, por lo que no tiene ningún sentido prohibirla. Lo determinante es el tipo de prueba, los ejercicios propuestos y la exigencia de que aparezcan los pasos intermedios, no sólo el resultado final.

Es importante destacar la labor de los *Grupos de Traballo* de la Comisión Interuniversitaria Galega. En el año 2006, 18 correctores analizaron 2567 ejercicios de la convocatoria de junio de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. El nivel de conocimientos demostrado por el alumnado en el bloque de Álgebra fue bueno; en una escala de uno a cinco, tenía una puntuación de cuatro, mientras que el Análisis y la Estadística puntuaban tres. Su conclusión es que la parte de Álgebra parece ser la que más se trabaja de las tres aunque todos los cálculos y procedimientos que realizan los alumnos parecen hechos de forma rutinaria.

Los principales errores encontrados son dificultades a la hora de despejar X en una ecuación matricial y para calcular la inversa de una matriz 2×2. Se recomienda realizar ejercicios de aplicaciones prácticas.

En el año 2008, 20 correctores analizaron 2675 exámenes. Se considera aceptable el nivel de conocimientos en Álgebra y Estadística y bajo en Análisis. El Álgebra es la parte en la que los alumnos constestan más a una de las dos opciones; sólo el 2% aproximadamente no contesta a ninguna opción. Como principal error los correctores señalan que los estudiantes no son capaces de interpretar los enunciados y de plantear un sistema de ecuaciones correctamente.

En la asignatura de Matemáticas se analizaron 3009 exámenes, en el año 2006. Nuevamente fue bueno el resultado en Álgebra: un cuatro en la puntuación, frente a un tres en Geometría y un dos en Análisis. Se detecta que muchos alumnos no comprueban la coherencia de los resultados obtenidos sino que se limitan a aplicar "fórmulas" para resolver los ejercicios. A modo de ejemplo, en la resolución del sistema de ecuaciones lineales dependiente de un parámetro pueden razonar que es compatible para ciertos valores del parámetro, y en el apartado siguiente deben resolverlo para uno de esos valores y dicen que es incompatible, quedando la duda de si no lo entienden o no se fijan.

Se observa que los alumnos tienen mucha dificultad para definir o exponer los conceptos. No manejan el lenguaje matemático necesario que les permita expresar un concepto con un mínimo de rigor o precisión. La mayoría de los estudiantes no detallan el razonamiento seguido en la resolución de los ejercicios. Por ejemplo: para los valores del parámetro que anulan el determinante de la matriz de los coeficientes, no se indican los menores que proporcionan el rango.

En el año 2008 se corrigieron 2672 exámenes. La nota media final fue de 6,4 con 2017 alumnos aprobados. Se considera que el nivel de conocimientos en Álgebra y Geometría es bueno y en Análisis, aceptable. En general se observa que los alumnos tienen mucha dificultad para definir o explicar conceptos. La mayoría de los alumnos optan por la realización de ejercicios mecánicos y evitan los que son más conceptuales. No explican el razonamiento seguido en la resolución de los ejercicios y no los justifican.

3.5.2. Aplicaciones del Álgebra Lineal en el contexto intruccional de 2º de Bachillerato.

De la Villa (1998) considera que el profesor de matemáticas debería tener presente la orientación que debe dar a los contenidos matemáticos, la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas y la posibilidad de encontrar aplicaciones a los contenidos que imparte. *El aspecto formativo de la materia (las matemáticas consideradas como arte) y el informativo (las matemáticas consideradas como herramienta) son igualmente importantes.* (De la Villa, 1998, pag 267)

El profesor de matemáticas puede paliar el inicial rechazo de los alumnos y conectar mejor con ellos tratando de acercar las matemáticas a situaciones de la vida real. Se deben buscar aplicaciones, si es posible, relacionadas con otras materias de sus estudios, pero también dichas aplicaciones pueden estar referidas a situaciones que engloben fenómenos físicos, económicos, tecnológicos y en general cualquier suceso real y que puedan motivar al estudiante para ver las matemáticas con otra perspectiva. De todas formas, hay que ser consciente a la hora de plantear estas aplicaciones que el intento de modelar situaciones no está exento de dificultades ya que muchas veces los estudiantes no poseen los conocimientos necesarios para realizar esta modelización.

Este autor ilustra sus opiniones ofreciendo diversas aplicaciones relacionadas con el Álgebra Lineal: el espacio vectorial de los colores, problemas donde intervienen matrices (comunicaciones, hábitos de los votantes, matrices para descifrar mensajes, matriz asociada a un trueque) o estabilidad de procesos.

Para Godino, Batanero y Navarro-Pelayo (1995) las matemáticas constituyen una actividad de resolución de situaciones problemáticas de una cierta índole, socialmente compartida; estas situaciones problemáticas se pueden referir al mundo natural y social o bien pueden ser internas a la propia matemática; como respuesta o solución a estos problemas internos o externos surgen y evolucionan progresivamente los objetos matemáticos.

Dentro del campo de las matemáticas encontramos multitud de aplicaciones del Álgebra Lineal: aplicaciones lineales, transformaciones lineales (simetrías o giros), resolución de sistemas de m ecuaciones con n incógnitas, cálculo del producto vectorial y mixto (y por tanto de áreas y volúmenes).

La Geometría analítica necesita el Álgebra Lineal en el cálculo de las ecuaciones de rectas y planos en el espacio, y en el cálculo de autovectores de formas cuadráticas. La expresión y clasificación de cónicas y cuádricas se realiza mediante matrices. Por ejemplo, la cónica

$$4x^2+y^2-4xy+4x-2y+1 = 0$$

está representada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

También se utiliza el Álgebra Lineal en el estudio de curvas alabeadas (curvas no contenidas en un plano). Se usan determinantes en el cálculo de la normal principal, plano rectificante (formado por la tangente y la binormal), plano osculador (determinado por la normal principal y la tangente) o radio de torsión.

Además cualquier cambio en un sistema de referencia viene expresado por una matriz.

3.5.2.1. Ejemplos de Situaciones.

Problema 1: (De Diego, Gordillo, 1979)

Los animales de una cierta raza se clasifican en tres clases según que posean dos genes de tipo G (clase de los dominantes, que denotaremos por 1), un gen del tipo G y otro del tipo g (clase de los híbridos, que denotaremos por 2) o dos genes del tipo g (clase de los recesivos, que denotaremos por 3). Se supone que la reproducción en esta clase de animales se hace siempre por cruce con un animal de la clase dominante y otro de la clase i, para i = 1,2,3 y que los hijos heredan siempre un gen de cada padre, con la misma probabilidad (=1/2) en el caso en que puedan ser G o g.

Denotemos por p_{ij} la probabilidad de que un animal de la clase j haya sido engendrado por colaboración de otro de la clase i. Sea P la matriz P = (p_{ij}), con i,j = 1,2,3. Denotemos por p_i^{n+1} la probabilidad de que en la generación n+1 nazca un animal de la clase i y pongamos:

$$p^{n+1} = \left(p_1^{n+1}, p_2^{n+1}, p_3^{n+1}\right)$$

Se pide:

1º) Determinar la matriz p^{n+1} en función de n y de la matriz p^1 de la composición probable inicial de la población.

2º) Suponiendo que dicha composición inicial sea $p_1^1 = \frac{1}{5}, p_2^1 = \frac{3}{5}, p_3^1 = \frac{1}{5}$ determinar la composición probable p^{n+1} al cabo de n+1 generaciones. Hallar la composición límite p^{∞} cuando el número de generaciones tiende hacia infinito.

Este es el enunciado del problema tal cual viene en el libro. Es un problema de oposiciones a cátedras y, por supuesto está muy por encima del nivel de secundaria. Sin embargo, creemos que podría adaptarse para su estudio en este nivel.

Lo primero que se pide es formar P = (p_{ij}), cosa que puede hacer perfectamente un alumno de 2º de Bachillerato.

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Este planteamiento tiene un problema: según esto no existirían individuos de la clase 3. Habría que modificar el enunciado para que fuera creíble; se podría decir que se está haciendo un experimento.

La otra cuestión es qué pasaría en la generación n+1, lo que justificaría el estudio del objeto potencia n-ésima de una matriz, que a los alumnos les resulta abstracto y difícil. Surge una dificultad: se utiliza la diagonalización de Jordan, en vez del método de inducción que se usa en secundaria. De todas formas no habría ningún problema en utilizar inducción. Incluso se podría proponer el cálculo de la potencia n-ésima de esta matriz en una práctica aparte, cuando se aborda este problema. El resultado del cálculo de esta potencia es: (omitimos los cálculos)

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2^n - 1}{2^n} & \frac{1}{2^n} & 0 \\ \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora el problema da una composición inicial $p_1^1 = \frac{1}{5}, p_2^1 = \frac{3}{5}, p_3^1 = \frac{1}{5}$ y pide la composición probable al cabo de n+1 generaciones. Esto le da al alumno la oportunidad de ver la utilidad de un vector fila y de estudiar el producto de matrices como una composición.

$$\mathrm{P}^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{P}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 \end{pmatrix}$$

Vemos que en cada generación hay que multiplicar las probabilidades iniciales por la matriz que da la reproducción. El alumno se puede preguntar por qué no se pone P^1 en columna y se multiplica al revés. Podemos estudiar cómo se hacen estos productos:

p_1^2 = probabilidad de que en la generación 2 nazca un individuo de la clase 1.

$p_1^2 = p_1p_{11}+p_2p_{21}+p_3p_{31}$ = probabilidad de que el padre sea de 1 y que engendre un hijo de la clase 1 + probabilidad de que el padre sea de 2 y que engendre un hijo de la clase 1 + probabilidad de que el padre sea de 3 y que engendre un hijo de la clase 1.

En caso de hacer la multiplicación al revés:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^2 \\ p_2^2 \\ p_3^2 \end{pmatrix}$$

$p_1^2 = p_{11}p_1 + p_{12}p_2 + p_{13}p_3$ = probabilidad de que el padre sea de 1 y que engendre un hijo de la clase 1 + probabilidad de que el padre sea de 2 por la probabilidad de que un animal de 2 haya sido engendrado por uno de la clase 1 + probabilidad de que el padre sea de 3 por la probabilidad de que un animal de 3 haya sido engendrado por uno de la clase 1.

¡Vemos que estamos multiplicando cosas que no tiene sentido!

Entonces en n+1:

$$P^{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2^n - 1}{2^n} & \frac{1}{2^n} & 0 \\ \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^{n-1}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2^n - 1}{2^n} & \frac{1}{2^n} & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora piden hallar la composición límite P^{∞}.

$$\lim_{n \to \infty} P^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para abordar este problema hacen falta conocimientos mínimos de probabilidad y límites de sucesiones pero, dedicándole tiempo, se puede explicar en secundaria. Además, sirve de oportunidad para relacionar el Álgebra Lineal con otras materias, en este caso, con la Genética y la Estadística.

Problema 2:

En el juego piedra-papel-tijera se cobran 5 céntimos por jugada ganada. Representa los pagos mediante una matriz.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ -5 & 0 & 5 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Consideramos, al escribir la matriz, que a nosotros nos correspondería el subíndice j y el subíndice i a nuestro contrincante. De coger i y j al revés el resultado sería la traspuesta de P.

Podemos también usar este ejemplo para estudiar el producto de matrices. Supongamos que sabemos que nuestro contrincante juega piedra el 40% de las veces, dividiendo el resto de sus jugadas por igual entre papel y tijera. La ganancia que podemos esperar, en función de su jugada, la da el siguiente producto de matrices:

$$\begin{pmatrix} 0'4 & 0'3 & 0'3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ -5 & 0 & 5 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0'5 & -0'5 \end{pmatrix}$$

Por tanto, sabemos que debo jugar papel.

Al igual que con el problema 1 tenemos aquí la oportunidad de estudiar la no conmutatividad del producto de matrices. ¿Por qué multiplicamos así y no al revés?

Esta situación lleva implícito el conocimiento de este juego por parte del alumno. En caso contrario, podría convertirse en una situación descontextualizada.

Problema 3:

Tenemos ahora un ejemplo de matrices Input-Output. Esta matriz de entradas y salidas fue presentada por el ruso Leontief, lo cual le ayudó a conseguir el premio Nobel de Economía en 1973.

Las matrices Input-Output o de doble entrada constituyen una de las aplicaciones más fructíferas de las Matemáticas a la Economía. Este modelo hace resaltar las interrelaciones entre las industrias que conforman la economía de un país. Cada industria utiliza las salidas de otras industrias como materias primas o entradas propias. A su vez sus salidas son usadas por otras industrias como entradas. De ahí el nombre de modelo de entrada y salida.

Analizaremos el método de Leontief suponiendo, de un modo simplificado, que la economía de un país se divide en los tres sectores tradicionales: agricultura, industria y servicios.

La agricultura utiliza como entrada las salidas de sí misma (como alimento para el ganado), de la industria (como la maquinaria agrícola y los fertilizantes) y de los servicios (como el transporte).

Al mismo tiempo, tanto la industria como los servicios utilizan la agricultura como entrada. Relaciones similares tendríamos para los otros dos sectores. Además, salidas de los tres sectores se requerirán para la exportación y el consumo. Es lo que se conoce como demanda final.

Con estos planteamientos, el modelo Input-Output puede usarse para predecir las necesidades futuras de producción, para facilitar las relaciones económicas, y para estructurar la producción nacional, orientando los sectores productivos en la dirección más provechosa.

Veamos ahora un ejemplo:

Un sistema económico se divide en tres sectores: agricultura (A), industria (I) y servicios (S). Se ha examinado en un determinado año su economía y se ha obtenido la siguiente tabla Input-Output, en millones de euros:

		Comprador			Demanda final	Salida total
		A	I	S		
Vendedor	A	80	30	12	78	200
	I	20	60	12	208	300
	S	40	30	36	14	120

El problema que se plantea es: Si el gobierno cree que es necesario que la demanda final suba hasta 320 millones de euros para la agricultura, 660 millones para la industria y 160 millones para el sector servicios, ¿cuáles deben ser las salidas totales para cada sector?

Primero se forma la matriz tecnológica, que indica qué parte de cada euro producido por cada sector es suministrada por los demás sectores:

$$\begin{pmatrix} \frac{80}{200} & \frac{30}{300} & \frac{12}{120} \\ \frac{20}{200} & \frac{60}{300} & \frac{12}{120} \\ \frac{40}{200} & \frac{30}{300} & \frac{36}{120} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'4 & 0'1 & 0'1 \\ 0'1 & 0'2 & 0'1 \\ 0'2 & 0'1 & 0'3 \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que para producir un euro, la agricultura necesite recibir 0’4 euros de sí misma, 0’1 de la industria y 0’2 de los servicios. Igual lectura tienen los otros dos sectores.

Se denota por x la nueva salida que se desea para la agricultura, por y la nueva salida para la industria y por z la nueva salida para los servicios.

Por ejemplo, la producción total de la industria tiene que ser:

Salida de la industria = salida hacia A + salida hacia I + salida hacia S + demanda final

De esta manera tenemos el siguiente sistema de ecuaciones (se le podría presentar a los alumnos de forma matricial):

$x = 0'4x + 0'1y + 0'1z + 320$

$y = 0'1x + 0'2y + 0'1z + 660$

$z = 0'2x + 0'1y + 0'3z + 120$

Problema 4:

Veamos ahora un ejemplo en el campo de la contabilidad.

Una agencia de viajes tiene tres sucursales S_1, S_2, S_3. En dichas sucursales quedan billetes de cuatro tipos B_1, B_2, B_3, B_4.

Las existencias se indican en esta matriz, siendo a_{ij} los billetes del tipo B_i que quedan en la sucursal S_j.

$$E = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Los precios de los billetes (en euros) son : B_1= 84, B_2= 30, B_3= 48, B_4= 18. Se pide calcular el dinero máximo que puede facturar cada sucursal y la agencia.

Otro ejemplo para utilizar la multiplicación de matrices.

$$\begin{pmatrix} 84 & 30 & 48 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 648 & 846 & 516 \end{pmatrix}$$

Las tres columnas de la matriz obtenida representan la facturación de cada sucursal, y si hacemos la suma obtenemos el total de la agencia.

Problema 5:

Una de las tareas primordiales de la Demografía es el análisis de la estructura de las poblaciones y la prospectiva de las mismas.

Una aproximación al problema de la estructura por sexos y edades de una población nos permite observar que basta con hacer el seguimiento, solamente, del número de mujeres. Considerar edades de hombres y mujeres conjuntamente sería complicado y, además, la capacidad de tener hijos depende, sobre todo, de la edad de la madre.

Obtendremos la mitad femenina de la pirámide de la población, lo que nos permitirá reconstruir la pirámide completa.

Vamos a formar una matriz con los datos del censo en España en 1970 y en 1985.

Edad	Mujeres 1970 (en miles)	Mujeres 1985 (en miles)	Número de hijos (en miles)
0-14	4619	4419	1344
15-29	3717	4534	2609
30-44	3427	3691	466

Los porcentajes de supervivencia en este periodo se calculan así:

- Para el grupo 0-14 (1970): $\frac{4534}{4619} = 0'981 = 98'1\%$ (1985)
- Para el grupo 15-29 (1970): $\frac{3691}{3717} = 0'993 = 99'3\%$ (1985)

Es decir, que para las mujeres del grupo 0-14 en 1970 sobrevivió quince años después el 98'1%. Análoga interpretación tiene el segundo porcentaje.

Los porcentajes de fertilidad se calculan así:

0-14: $\frac{1344}{4619} = 0'291 = 29'1\%$

15-29: $\frac{2609}{3717} = 0'702 = 70'2\%$

30-44: $\frac{466}{3427} = 0'136 = 13'6\%$

La matriz de evolución de la población es:

$$\begin{pmatrix} 0'291 & 0'702 & 0'136 \\ 0'981 & 0 & 0 \\ 0 & 0'983 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz expresa el porcentaje de mujeres que en el periodo dado por las filas (año 1985) provienen de las mujeres del periodo anterior (año 1970), separadas según los grupos de edad. Los valores 0 que aparecen en la matriz responden a situaciones imposibles.

¿Qué se obtiene si multiplicamos esta matriz por la matriz columna que representa los datos de la primera tabla para 1970?

$$\begin{pmatrix} 0'291 & 0'702 & 0'136 \\ 0'981 & 0 & 0 \\ 0 & 0'983 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4619 \\ 3719 \\ 3427 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4419 \\ 4531 \\ 3690 \end{pmatrix}$$

Se obtiene (salvo errores provocados por el redondeo de porcentajes) la estructura conocida de la población femenina en 1985.

La matriz de la evolución de la población permite hacer predicciones sobre la evolución de la población femenina en el siguiente periodo. Así, para el año 2000 se obtendrá para los periodos considerados:

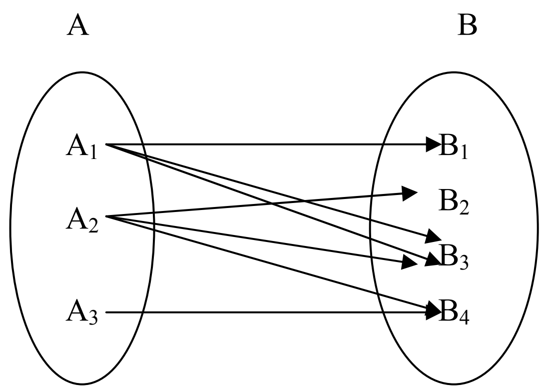
$$\begin{pmatrix} 0'291 & 0'702 & 0'136 \\ 0'981 & 0 & 0 \\ 0 & 0'983 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4419 \\ 4531 \\ 3690 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4969 \\ 4335 \\ 4449 \end{pmatrix}$$

Problema 6:

Figura como introducción al tema de matrices en el libro *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II* (Colera, Oliveira, García, 2001a). Es un buen ejemplo de cómo poner información en una tabla (no se menciona la palabra matriz) y después manda hacer una composición, lo cual equivale a multiplicar matrices.

En un país A hay tres aeropuertos internacionales, A_1, A_2, A_3, mientras que en el país B hay cuatro, B_1, B_2, B_3, B_4.

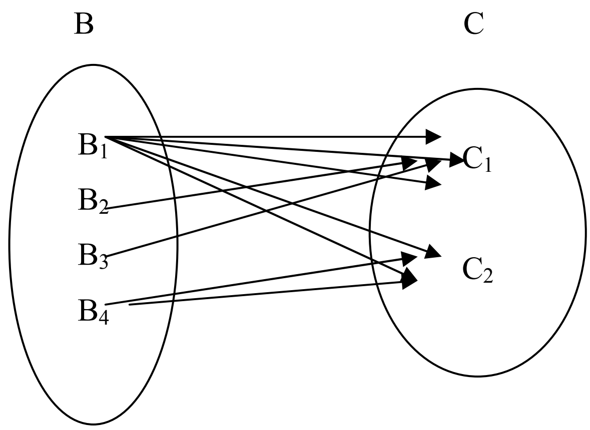
Una persona que quiera ir el lunes de A a B dispone de los siguientes vuelos:



La información anterior puede ser representada mediante la tabla siguiente:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	0	2	0
A_2	0	1	1	1
A_3	0	0	0	1

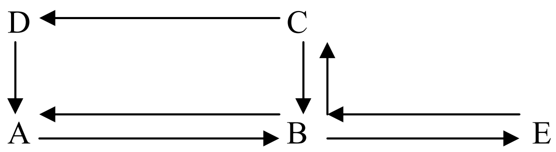
Aquí están representados, mediante flechas, los vuelos que hay el martes desde el país B hasta el país C



Representa, mediante una tabla como la anterior, la información recogida en el diagrama.

Una persona quiere llegar el lunes de A, pasar la noche en B y llegar el martes a C. ¿Cuántas posibles combinaciones tiene por cada punto de salida y cada punto de llegada?

En el libro *Euler. 2º Bachillerato* de SM, tenemos un ejemplo parecido, enmarcado dentro de la teoría de grafos. Tenemos en este caso cinco aeropuertos.



Se hace una matriz del grafo:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las formas de ir de un aeropuerto a otro haciendo una escala las da la matriz $H = G^2$.

La matriz que nos dice de cuántas maneras se puede viajar entre dos aeropuertos haciendo como mucho un escala es $J = G+G^2$.

Como ejercicio resuelto tenemos:

¿Qué representa la matriz $K = G+G^2+G^3$? Esta matriz tiene un único elemento nulo. Sin calcular la matriz decide cuál es y por qué.

La matriz K representa las maneras de volar entre dos aeropuertos sin escalas o con uno o dos escalas.

No es posible salir de D y volver a D con menos de tres escalas. Por tanto, $k_{44} = 0$.

Problema 7:

Viene como introducción al tema "Sistemas de ecuaciones lineales" del libro "Matemáticas. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud". (Bobillo y García, 2000)

Queremos analizar la combustión de metano (CH_4) en atmósfera de oxígeno molecular (O_2) para dar lugar a monóxido de carbono (CO) y agua (H_2O).

Debemos considerar todos los átomos de cada elemento como idénticos e indivisibles.

Además, la cantidad de materia se ha de conservar durante cualquier reacción química.

De aquí se sigue que el número de átomos presentes antes de la reacción debe igualar a los que hay después. Se trata de encontrar unos coeficientes a,b,c,d de forma que la reacción:

$aCH_4 + bO_2 \rightarrow cCO + dH_2O$

esté de acuerdo con las leyes de la química, antes citadas.

En la reacción intervienen tres clases de átomos: C, H y O. Igualando el número de ellos antes y después de la reacción obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} a = c \\ 4a = 2d \\ 2b = c + d \end{cases}$$

En "Problemas de Álgebra" de De la Villa (1994), tenemos otra reacción química.

En presencia de ácido sulfúrico (H_2SO_4) el bromato potásico ($KBrO_3$) oxida al bromuro potásico (KBr) para obtener bromo (Br_2), sulfato potásico (K_2SO_4) y agua (H_2O). Ajustar dicha reacción química.

$x_1(H_2SO_4) + x_2(KBrO_3) + x_3(KBr) \rightarrow x_4Br_2 + x_5(K_2SO_4) + x_6(H_2O)$

Tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 = 2x_6 \\ x_1 = x_5 \\ 4x_1 + 3x_2 = 4x_5 + x_6 \\ x_2 + x_3 = 2x_5 \\ x_2 + x_3 = 2x_4 \end{cases}$$

Este sistema es compatible indeterminado, lo cual nos servía para interpretar un sistema de infinitas soluciones en un caso real. Además es homogéneo (siempre sale un sistema homogéneo al ajustar un reacción química).

Problema 8:

En "Matemáticas II. Bacharelato" (Biosca, 2001b) se utiliza un ejemplo práctico para ilustrar las operaciones con matrices.

De un depósito marino se obtiene petróleo (P) y gas natural (G). Para poder convertir estas materias primas en combustible utilizable se sigue un proceso que consta de cuatro fases: extracción (E), transporte (T), refinación (R) y distribución (D).

Nos interesa representar las horas invertidas en efectuar cada fase del proceso sobre una tonelada de materia prima. Para eso utilizamos la siguiente matriz:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} E & T & R & D \end{array} \\ H = & \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ 6 & 12 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} P \\ G \end{array} \end{array}$$

Cada columna corresponde a una fase del proceso y cada fila a una materia prima.

Consideramos ahora una nueva matriz H^*, que representa las horas muertas que hay que añadir a cada fase debido a trámites administrativos, certificaciones, etc:

$$H^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos representar el tiempo total de las distintas fases por medio de la matriz suma:

$$H + H^* = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & 2 \\ 8 & 15 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Se introduce ahora una mejora técnica en el proceso que permite reducir en un 30% el tiempo invertido en cada fase.

Podemos representar el tiempo invertido en cada fase después de la implantación de esta mejora por medio de la matriz 0'7H.

$$0'7H = \begin{pmatrix} 2'1 & 3'5 & 1'4 & 0'7 \\ 4'2 & 8'4 & 3'5 & 1'4 \end{pmatrix}$$

Representamos ahora por una matriz C el coste por hora (en unidades monetarias) de cada fase del proceso de obtención de combustible, por tonelada de materia prima.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} P & G \end{array} \\ C = & \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \\ 4 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} E \\ T \\ R \\ D \end{array} \end{array}$$

El coste total del proceso para cada materia prima se puede obtener calculando la matriz producto HC:

$$HC = \begin{pmatrix} 48 & 34 \\ 110 & 77 \end{pmatrix}$$

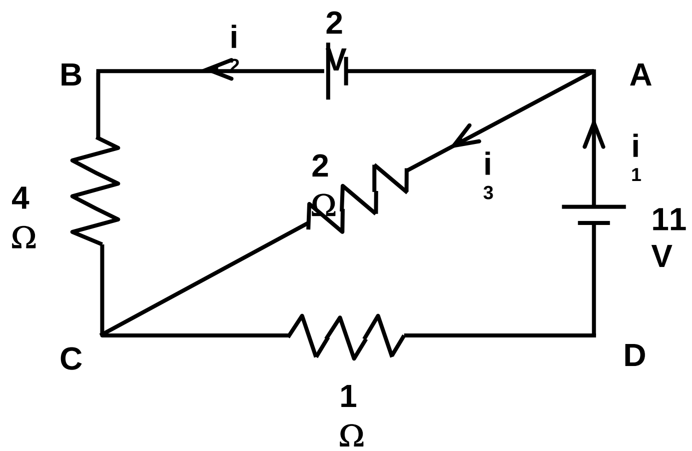
De acuerdo con esto, el proceso de obtención de combustible a partir de una tonelada de petróleo cuesta 48 unidades monetarias; y a partir de una tonelada de gas natural, 77.

Los valores 34 y 110 carecen de significado, ya que corresponden a los costes totales del proceso de cada materia prima calculados a partir de los costes horarios de la otra.

Problema 9: (De la Villa, 1994)

Tenemos una aplicación a la elctricidad.

Calcular las intensidades en cada rama del circuito:



Aplicaremos las leyes de Kirchoff:

- La suma de las intensidades en un nudo es 0.
- La suma de fuerzas electromotrices en una malla es o.

Nudo A: i_1-i_2-i_3 = 0

Nudo C: i_2+i_3-i_1 = 0 (análoga a la del nudo A)

Malla ABCA: 4i_2-2i_3-2 = 0

Malla ACDA: i_1+2i_3-11 = 0

Malla ABCDA: 4i_2+i_1-13 = 0 (suma de las dos anteriores)

El problema se resuelve con un problema de ecuaciones.

Problema 10: (De la Villa, 1998).

En un país democrático bipartidista, cuyos partidos los designaremos por halcones (H) y palomas (P), los hábitos de los votantes son los siguientes: Los votantes del partido H, en la elección siguiente vuelven a votar a dicho partido las tres quintas partes de ellos, la quinta parte vota al partido P y la quinta parte se abstiene. Los votantes del partido P vuelven a votar a dicho partido las tres quintas partes de ellos, la quinta parte vota al partido H y la quinta parte se abstiene. Finalmente de los que se abstienen en una elección, en la elección siguiente las tres quintas partes votan al partido P, la quinta parte al H y el resto se abstiene. En las últimas elecciones el partido H obtuvo el 60% de los votos y el partido P el 30%. ¿Cuándo gobernará el partido P por primera vez?

Para solucionar el problema se considera el vector $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, siendo a_n el porcentaje de votantes del partido H en la elección n, b_n el porcentaje de votantes del partido P en la elección n y c_n el porcentaje de abstenciones en dicha elección. Se entiende que n = 1 corresponde a la primera elección que debe celebrarse. El vector inicial es

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0'6 \\ 0'3 \\ 0'1 \end{pmatrix}$$

El proceso de votación se rige por la regla

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0'6 & 0'2 & 0'2 \\ 0'2 & 0'6 & 0'6 \\ 0'2 & 0'2 & 0'2 \end{pmatrix} X_n = AX_n$$

donde A es la matriz de transición del proceso.

$$X_1 = AX_0 = \begin{pmatrix} \frac{11}{25} \\ \frac{9}{25} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Como $\frac{11}{25} > \frac{9}{25}$, sigue gobernando el partido H.

$$X_2 = AX_1 = \begin{pmatrix} \frac{47}{125} \\ \frac{53}{125} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Al ser $\frac{53}{125} > \frac{47}{125}$, en la segunda elección gobierna el partido P.

Podríamos ofrecer muchas más aplicaciones del Álgebra Lineal, aunque algunas de ellas no son adecuadas para alumnos de Enseñanza Secundaria. En concreto hemos de mencionar el trabajo de Rojas (2003), donde se presentan tres aplicaciones en el ámbito de las Ciencias de la Computación de la descomposición de los valores singulares de una matriz. Para esta autora estas situaciones se podrían proponer como actividades opcionales a desarrollar por los alumnos interesados, siendo estos alumnos de primer curso de cualquier Ingeniería o de la titulación de Informática. Concretamente se refiere a las siguientes aplicaciones:

1) comprensión de una imagen digital.

2) reconocimiento automático de dígitos escritos a mano.

3) recuperación de información.

El artículo comenta en qué consiste la descomposición en valores singulares de una matriz y después pasa a sus aplicaciones: comprensión de una imagen digital, reconocimiento automático de dígitos escritos a mano y recuperación de información.

Gracia (2002) estudia la aplicación del Álgebra Lineal a los buscadores de internet. Define una matriz de incidencia m×n, $A = (a_{ij})$, donde cada elemento indica el número de veces que la palabra i está en la página j. Mediante otros cálculos a cada página web se le daría una valoración numérica. Además, mediante el uso de matrices sería posible encontrar páginas web que contengan literalmente las palabras que buscamos o palabras sinónimas y la elaboración automática de un diccionario de sinónimos o de los diferentes significados de una palabra.

3.5.3. Características de los estudios revisados.

Una vez realizado un análisis de las investigaciones más relevantes en relación con las pruebas de acceso a la universidad y el estudio del Álgebra, las características más significativas que podemos deducir de ellas son las siguientes:

1. Se hecha de menos en el examen de Selectividad una referencia a la resolución de problemas, pese a que en el currículo de 2º de Bachillerato se menciona especialmente. Las clases de este curso están planteadas para resolver actividades similares a las presentadas en las PAUU, por lo que no tiene objeto practicar la resolución de problemas en el aula si en la Selectividad sólo se plantean ejercicios rutinarios. Fernández (2001) asegura que el alumno sólo sabe lo que se le evalúa y poco de lo que no se le evalúa por lo que no considera necesario enseñar resolución de problemas en este curso. Godino (2003b) relacionaba la idea de significado con la de comprensión diciendo que un sujeto "comprende" el significado de un objeto cuando es capaz de reconocer sus propiedades y representaciones, relacionarlo con otros objetos y aplicarlo a una variedad de situaciones problemáticas prototípicas. Si las clases de 2º de Bachillerato sólo están enfocadas a resolver actividades similares a las planteadas en las PAUU, entonces podríamos afirmar que el alumno no llegará a comprender el significado de los objetos asociados al Álgebra Lineal.

2. La calculadora gráfica es otro aspecto que plantea debate entre los profesionales, habiendo actualmente algunas Comunidades Autónomas que permiten su uso, otras que no y otras que sólo lo admiten en la asignatura de Matemáticas II pero no en la de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. Los profesores que defienden su uso sostienen que su utilización no es determinante para aprobar las pruebas de acceso y que, además, sólo el alumno que realmente sabe Matemáticas es el que podría aprovecharla convenientemente.

También se defiende su uso abogando por una mayor profundización en los conceptos teóricos en vez de dedicar tanto tiempo a la realización de cálculos, a menudo tediosos, que sólo tienen por objeto la consolidación del uso de determinados algoritmos.

Diversos estudios de índole diferente a la que nos ocupa (Font, Godino, D'Amore, 2007) utilizan programas informáticos como el Cabri o el Calcula en los cuestionarios pasados a los alumnos, conociendo estos el manejo de alguno de estos programas en diferentes cursos. Sin embargo, en las Pruebas de Acceso se les niega el uso de diversas tecnologías.

3. La mayoría de los estudios que encontramos sobre la enseñanza del Álgebra no se refieren a la etapa previa a la Universidad, sino a edades más tempranas, sobre todo al paso de la Aritmética al Álgebra. De ahí las pocas investigaciones que presentamos sobre los cursos que ahora nos ocupan.

Consideramos importante, de todas formas, haber estudiado también estos trabajos sobre la enseñanza del Álgebra ya que muchos de los errores que presentan los alumnos de 2º de Bachillerato a la hora de resolver actividades de Álgebra Lineal tienen su origen en los primeros años de la ESO e, incluso, en los últimos de la primaria.

Las investigaciones sobre el aprendizaje del Álgebra abarcan diversos campos como la relación entre Álgebra y geometría o el cálculo operacional con expresiones algebraicas.

4. En general se observa en estos estudios que los alumnos sólo ven en el Álgebra un instrumento de cálculo, no siendo capaces de relacionar los objetos matemáticos con los que trabajan con otros trabajados en otra unidad didáctica. No se da una interpretación de los cálculos realizados. Además los alumnos presentan dificultades a la hora de definir o exponer los conceptos.

5. Se observa que el Álgebra obtiene mejores resultados que otras partes de las Matemáticas en las Pruebas de Acceso a la Universidad. Es una materia más trabajada pero las situaciones planteadas se resuelven de manera rutinaria, siendo la recomendación de la Comisión Interuniversitaria de Galicia el manejo de más aplicaciones prácticas en el aula para paliar este problema.

6. Las investigaciones sobre la enseñanza del Álgebra muestran que, en general, el uso de justificaciones al presentar los contenidos algebraicos han desaparecido y que se usan pocas estructuras algebraicas, sustituyendo estas por fórmulas.

7. El Álgebra Lineal es, usando una expresión de Dorier (2000), un ''compuesto explosivo" de lenguajes y sistemas de representación. Tenemos el lenguaje "geométrico" al trabajar en espacios de dos y tres dimensiones que incluyen puntos, rectas, planos, transformaciones geométricas, el lenguaje "algebraico" al referirnos a la teoría de R^n con n-uplas, solución de sistemas de ecuaciones lineales, matrices, rango, el lenguaje "abstracto" de espacios vectoriales, subespacios, espacio generado, dimensión, transformaciones lineales. También hay registros '' gráficos", ''tabulares" y "simbólicos" de los lenguajes del Álgebra Lineal. Y no nos olvidemos de las representaciones cartesianas y paramétricas de subespacios.

Capítulo 4.
Significados Personales e Institucionales del Álgebra Lineal.

4.1- *Introducción.*

De acuerdo con los objetivos de la investigación, en este capítulo y en el siguiente nos proponemos analizar cómo "viven" los objetos matrices y determinantes en nuestro sistema de enseñanza. Ya hemos presentado los programas oficiales y ahora se tomarán los manuales usados en clase por los alumnos.

Para ello vamos a realizar un estudio del tratamiento dado al Álgebra Lineal en el periodo de vigencia del antiguo COU y en el periodo actual del Bachillerato LOGSE/LOE (hay que destacar que la forma de abordar el Álgebra Lineal en este curso es similar en estos dos últimos planes de estudios). La investigación será realizada a partir del análisis de un libro de COU, y será contrastada con el tratamiento que se da en la actualidad el Álgebra Lineal en un libro de 2º de Bachillerato. Con este estudio aportamos criterios para el problema central de nuestra investigación: dificultades en la comprensión de los conceptos asociados al Álgebra Lineal.

Este análisis permitirá analizar el entramado de relaciones institucionales referidas a los objetos matrices y determinantes en que se desarrollan las concepciones de los sujetos, las cuales deben ser tenidas en cuenta como posibles variantes expositivas de las inconsciencias y errores de los estudiantes. Asimismo, los significados institucionales identificados pueden ser el origen de obstáculos de tipo didáctico sobre los cuales debería actuarse mediante una correcta planificación de la enseñanza (Godino y Batanero, 1994b).

4.2. *Estudio escolar del Álgebra Lineal en 2º de Bachillerato.*

La implementación y utilización del libro de texto en el aula de matemáticas se ha producido de forma generalizada desde los inicios de la educación obligatoria hasta nuestros días, como objeto de estudio, como material de consulta, como registro de las actividades del alumno, como colección de ejercicios propuestos y problemas a resolver… Desde el punto de vista histórico, en la transmisión del conocimiento, ha constituido un hito importante la aparición del libro escolar, que se puede considerar un elemento cultural reflejo de la evolución social que selecciona unos contenidos frente a otros, que impone una determinada forma de estructurarlos y que propone a la siguiente generación cierto tipo de problemas con unas herramientas semióticas y no otras.

Gónzalez y Sierra (2004) señalan que la producción de libros de texto se lleva a cabo dentro de un contexto determinado y responde a las corrientes epistemológicas y didácticas al uso, sin olvidar los condicionantes económicos como la rentabilidad del producto para el autor o para la editorial. Además, existiendo en el caso español disposiciones oficiales sobre el currículo, los libros de texto tienen que adaptarse a ellas.

La necesidad de transformación de los saberes matemáticos para ser incluidos en cualquier manual escolar, convirtiéndose así en objetos de enseñanza, hacen que estos últimos tengan unas características específicas derivadas de las exigencias siguientes:

- Exigencia de una programabilidad para la adquisición del saber, debe existir un inicio y una secuenciación.
- Exigencia de una textualización del saber, es decir una organización discursiva del conocimiento objetivo.

Hay que tener en cuenta que debido a la complejidad del significado de los objetos matemáticos, no es posible, en un primer estudio de un tema, adquirir por completo este significado, sino sólo algunos sentidos del mismo (Font, 2005, Ruiz, 1993). De este modo, un mismo objeto aparece a lo largo del currículo en diferentes niveles de profundización. En las primeras ocasiones su empleo será implícito, por lo que tendrá un carácter protomatemático para el alumno (Chevallard, 1999), aunque para el profesor tenga un carácter de objeto matemático de enseñanza.

De todas formas, por aparecer las matrices y determinantes únicamente en el último curso de Bachillerato no estamos ante un caso de estudiar el objeto en varios cursos, profundizando cada vez más en su significado. Sin embargo, por citar un ejemplo, cuando al alumno se le instruye, con anterioridad, en la resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método de reducción, podríamos decir que el método de Gauss se esta utilizando con un carácter protomatemático.

Tanto en la elección del libro de texto de COU como en la del libro de 2º de Bachillerato, en el capítulo siguiente, se ha valorado que siga las orientaciones establecidas en el currículo oficial y que ofrezca un significado institucional escolar lo más similar posible al significado pretendido en las aulas. No se ha buscado en ningún momento que fueran precursores de nuevos métodos ni formas de entender la enseñanza de las matemáticas, ya que el objetivo de este trabajo es analizar los problemas de la enseñanza del Álgebra Lineal, no proponer nuevos métodos de enseñanza-aprendizaje (en todo caso esto sería el objetivo de trabajos posteriores).

En capítulos anteriores se ha intentado contextualizar cada uno de los periodos a analizar, exponiéndose las orientaciones oficiales que se establecieron en ellos, para poder analizar los libros a la luz de estas consideraciones. En este capítulo se hace un análisis de la forma de presentación del Álgebra Lineal en cada uno de los libros, estudiando las formas de expresión matemática que en ellos se incluyen.

4.3. *Estudio del Álgebra Lineal en un texto de COU.*

En esta sección pretendemos comprobar la hipótesis de que en la época de vigencia del anterior plan de estudios el estudio de los espacios vectoriales constituía un contenido propio, y su aplicación a la enseñanza de las matrices propiciaba un enfoque formal de dichos objetos.

El texto que hemos seleccionado es: Matemáticas I, Vizmanos, J. R., Anzola, M. (1989).Madrid: SM. El criterio para seleccionarlo fue puramente personal, por ser el libro que usó la autora de este trabajo cuando cursó COU, siendo un manual muy usado en el curso 1989-1990 y en años posteriores. De todas formas esta elección se realizó después de revisar una cantidad adecuada de libros de texto, procurando que el elegido fuese totalmente representativo y que la pérdida de información que supone el estudio de un único libro de texto fuese mínima. El libro escogido representa a otros que son similares.

4.3.1. Análisis del libro.

El texto divide el bloque de Álgebra Lineal en cinco unidades:

- Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss.
- Espacios vectoriales.
- Matrices.
- Determinantes.
- Sistemas de ecuaciones lineales.

Tras una breve introducción, se presentan los sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas y tres ecuaciones con tres incógnitas, definiendo diversos conceptos, entre ellos el de solución, y el de sistema homogéneo. Los ejemplos se refieren a sistemas compatibles (determinados e indeterminados) e incompatibles, lo cual se volverá a ver en la lección 5. No se le plantea ninguna actividad al alumno. En la introducción se relaciona el método de reducción con el de Gauss, diciendo que consiste en transformar el sistema dado en otro equivalente. El significado institucional de sistema equivalente e uno dado es el de un sistema de ecuaciones que tiene las mismas soluciones que el sistema anterior. Este puede ser un obstáculo de tipo didáctico, ya que el concepto de sistema equivalente todavía no se ha estudiado y el estudiante, cuando aplica el método de reducción, no considera que esté transformando un sistema en otro equivalente, tan solo que está realizando operaciones para calcular el valor de las incógnitas.

La siguiente sección (pag 12) se dedica a los sistemas equivalentes y se dan criterios para transformar un sistema en otro equivalente. Para presentar estas pautas se introducen ejemplos y ejercicios resueltos, alguno de los cuales utiliza el método de Gauss, aunque sin nombrarlo explícitamente.

Este método se presenta en la sección 3, dando una breve exposición de en qué consiste, para estudiarlo en los ejercicios resueltos, tres con sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas y dos de tres ecuaciones y tres incógnitas. La idea que ofrece el texto para entender el objetivo del algoritmo es que se trata de obtener un sistema equivalente a uno dado. No se presenta sólo como un método de resolución. Aunque el alumno no lo sabe por el momento, el significado institucional que se está presentando de forma explícita es el de transformar filas o columnas de una matriz o un determinante, obteniendo objetos equivalentes.

La última sección de este tema es “discusión de un sistema lineal por el método de Gauss”. Se menciona que en el capítulo 5 se usará el teorema de Ruoché-Fröbenius para discutir sistemas, pero que es interesante ver el método de Gauss para la discusión de un sistema.

Por primera vez se muestra un sistema de *m* ecuaciones con *n* incógnitas:

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n = c_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n = c_2$

$a_{31}x_1+a_{32}x_2+\ldots+a_{3n}x_n = c_3$

…………………………

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n = c_n$

Se explica cómo interpretar el resultado de convertir un sistema en uno escalonado por el método de Gauss. Aparece el término “ecuación no trivial”, dando por sentado que el alumno conoce el significado, aunque no lo encontramos anteriormente (sólo se había nombrado en la página 11 la “solución trivial” refiriéndose a solución nula). Se quiere también discutir con este método los sistemas dependientes de un parámetro, pero eso se hace con ejemplos.

Se considera conocida la expresión “discusión de un sistema”, aunque no había aparecido anteriormente.

Tenemos ahora cuatro ejercicios resueltos. En estos se propone discutir y resolver el sistema, dos dependen de un parámetro y otros dos no. Al contrario de las actividades resueltas en la sección 3, ahora no se indican las transformaciones hechas en las ecuaciones en los distintos pasos del ejercicio, siendo el alumno el que ha de pensar qué cuentas se han hecho para pasar de un sistema a otro. Además, se introduce como novedad que la primera incógnita que se elimina no es la *x* sino la *z*, lo cual no coincide ni con la exposición teórica del método de Gauss ni con los ejercicios resultos anteriormente. No se da ninguna justificación del porqué de estas acciones.

El aprendizaje en esta sección concluye con el planteamiento de 21 cuestiones y 25 ejercicios y problemas.

Las cuestiones son del tipo:

3- Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ¿puede tener exactamente dos soluciones? Si la respuesta es afirmativa, da un ejemplo; en caso contrario, razona por qué no.

8- Si un sistema de ecuaciones lineales tiene más ecuaciones que incógnitas, ¿es necesariamente compatible? Razona la respuesta.

Merece un comentario especial la cuestión 7:

7- Si en un sistema de ecuaciones lineales hay tantas ecuaciones como incógnitas, las incógnitas están entonces determinadas. ¿Es cierta esta afirmación? Razona la respuesta.

La expresión “las incógnitas están determinadas” es nueva para el alumno, y puede dar lugar a confusión y a no interpretar (Godino, 2002b) a qué se refiere el emisor (en este caso el libro de texto).

En cuanto a los problemas propuestos, la mayoría son “problemas de enunciado”, es decir, el alumno ha de plantear el sistema de ecuaciones para posteriormente resolverlo. En algunos de ellos se han de poner en juego conocimientos adquiridos en otros cursos: divisibilidad de polinomios y teorema del resto, proporciones, y figuras planas y poliédricas. Por ejemplo:

8- Hallar los coeficientes a,b,c del polinomio x^3+ax^2+bx+c, para que sea divisible por (x-2), tenga por resto -8 al dividirlo por (x-1), y por resto -6 al dividirlo por (x+1).

Quizás no queda suficientemente clara la distinción entre cuestiones, ejercicios y problemas. Veamos, por ejemplo, la cuestión 16:

16- En un corral hay patos y gallinas, que hacen un total de 61 cabezas y 196 patas. Sin resolver el problema, ¿puede afirmarse que no todos son conejos ni todas son gallinas?

El significado institucional de “cuestión” es la de pregunta teórica breve. En este caso planteamos una actividad que no es teórica, la cual puede ser fácilmente resuelta por el alumno utilizando métodos aritméticos, pero si ha de dar una justificación utilizando los contenidos estudiados en el tema seguro que encontrará obstáculos: ¿cómo plantear esto con un sistema de ecuaciones? ¿Cómo dar una respuesta sin resolver este sistema?

Los espacios vectoriales son presentados en la unidad 2 mediante los espacios numéricos R^2, R^3 y R^n. Se comienza el tema con una breve introducción en la que se comenta la diferencia semiótica entre vector tal y como se conoce en física y vector como elemento de un espacio vectorial; se asocia el nombre de vector con los polinomios, las sucesiones acotadas o las funciones continuas definidas en un intervalo.

Se estudian los espacios R^2 y R^3, objetos introducidos en cursos anteriores. Aunque en un principio se utilice la palabra “espacio” para referirse a R^n, a la hora de recordar sus propiedades se utiliza la expresión “conjunto”. En ambos se presentan sus elementos, se define la igualdad entre elementos, la suma, el producto por números reales y las propiedades de estas operaciones. Comprendiendo esto, se considera que no es difícil asimilar la definición de R^n y sus operaciones, aunque se utilice un lenguaje formal, trabajando con n-uplas.

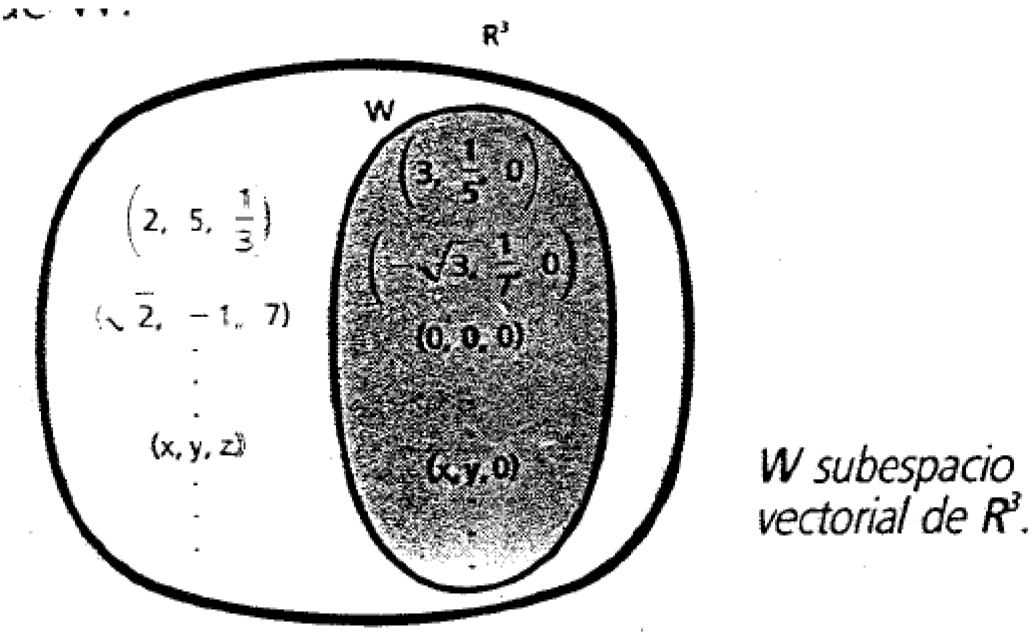
Comienza la sección 2 mencionando que R^2, R^3 y R^n son espacios vectoriales, para pasar a dar la definición de espacio vectorial de forma general. Se parte de un conjunto no vacío V = {u,v,w,…}, se introducen la suma y el producto por números reales y las mismas propiedades que en R^2 y R^3, intentando conectar con lo que se supone ya sabía el alumno, con esta nueva definición. Como observaciones, se menciona que la suma es una operación interna y que (V,+) es un grupo abeliano, que el producto por números reales es una operación externa y se define la diferencia de vectores. Como ejemplos de espacios vectoriales: el conjunto de vectores libres del plano, conjunto de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que *n*, conjunto de sucesiones de números reales, conjunto de funciones reales continuas definidas en un intervalo y conjunto de números complejos. Todo ello estudiado por los alumnos en cursos anteriores y, por tanto, dando por supuesto su dominio. Por último se presenta un cuadro con los nombres de las distintas estructuras algebraicas que tenemos, a medida que se añaden nuevas propiedades. Señalamos que este cuadro no se corresponde con lo estudiado, ya que para obtener la estructura de espacio vectorial necesitamos las operaciones de suma y producto por un escalar, mientras que aquí se presentan la suma y el producto, alcanzando la estructura de cuerpo conmutativo. Esto puede ser problemático ya que el alumno puede confundir ambos productos, y puede confundir el 1 escalar y el 1 como unidad del cuerpo.

Se insiste en las propiedades de las operaciones en la sección 3, dando las propiedades de los ceros (tanto el 0 escalar como el 0 del espacio vectorial, escribiendo en negrita este último), las de los signos y las propiedades simplificativas.

Para introducir la noción de subespacio vectorial se parte de un ejemplo concreto: *Consideremos el espacio vectorial R^3, y el subconjunto W formado por los vectores cuya tercera componente es nula, es decir:*

$W = \{(x,y,0)/x,y \in R\}$

Este enunciado se acompaña de un diagrama de Venn.



Tras explicar por qué W es un espacio vectorial, se generaliza la definición de subespacio vectorial, y se menciona el subespacio formado por el vector nulo y el propio V como subespacios triviales o impropios, llamando a los demás subespacios propios.

Como ejercicios resueltos, tenemos dos ejemplos teóricos de subespacios vectoriales.

En la sección 5 se define la combinación lineal de vectores, destacándose que para formarla se utilizan las dos operaciones lineales con vectores. Se considera que el alumno entiende el significado de "operación lineal". Este apartado es seguido de seis ejercicios donde se expresan unos vectores como combinación lineal de otros.

El subespacio engendrado por el conjunto de vectores S = $\{u_1,\ldots,u_n\}$ se presenta como el conjunto de todas las combinaciones lineales que podemos hacer con estos n vectores. Se justifica que este subespacio engendrado es un espacio vectorial y al conjunto S se le da el nombre de sistema generador. Aparece la notación L(S) = $\langle u_1,\ldots,u_n \rangle$ para referirse al subespacio engendrado. Estos conceptos son completados con seis ejercicios resueltos, donde se pide hallar el subespacio vectorial engendrado por otros vectores o demostrar que un conjunto de vectores es un sistema generador.

Una vez expuesto el concepto de combinación lineal se define la dependencia e independencia, de dos formas distintas, y se presentan ejercicios donde se estudia la dependencia de vectores pero sólo utilizando una de las definiciones. Ver la conexión entre ambas definiciones es trabajo del alumno: relacionar una definición con la otra y comprobar su equivalencia. Buscar la relación entre dos significados institucionales puede ser el origen de obstáculos de tipo didáctico

Se presentan tres propiedades, consecuencias de la definición de dependencia e independencia lineal:

1. Todo conjunto de vectores que contiene al vector nulo es linealmente dependiente.

2. Un vector es linealmente independiente si, y sólo si, no es nulo.

3. En todo espacio vectorial V, si tenemos un sistema generador formado por p vectores y un conjunto de vectores linealmente independiente formado por n vectores, se verifica que $n \leq p$.

No se ofrece ninguna justificación de estos resultados.

Una vez expuestas estas propiedades, se define el rango de un conjunto de vectores como el número máximo de vectores de dicho conjunto linealmente independientes, y se pasa a definir los conceptos de base y dimensión de un espacio vectorial, dándoles sentido con ejemplos sencillos, aunque no se aborda en su totalidad:

Dar una base y hallar la dimensión del espacio vectorial $P_2[x]$ *de los polinomios de grado menor o igual a dos.*

Los autores comentan que $B = \{x^2, x, 1\}$ es la base más sencilla de todas, pero no justifican cómo se llega a obtener ni por qué es la más sencilla, lo que puede resultar complicado para el estudiante por tratarse de conceptos totalmente nuevos.

El concepto de base permite definir las coordenadas de un vector, y para ello se comienza con los vectores de R^2, que son los que el alumno conoce de cursos anteriores, ilustrando la explicación con un dibujo de un vector en el plano. Se introduce la definición de coordenadas de un vector en un espacio vectorial real V de dimensión n. Además se demuestra formalmente que las coordenadas de un vector cualquiera respecto de una base son únicas.

Las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales se exponen a través de un ejemplo, introduciendo a continuación la definición teórica y mencionando que a las aplicaciones lineales también se les llama homomorfismos.

Tras enunciar unas propiedades de las aplicaciones lineales se resuelven dos ejercicios como ejemplo en los que se discute si una aplicación dada es lineal.

Para complementar el estudio de los espacios vectoriales se plantean al alumno 17 cuestiones. Por ejemplo:

2- ¿Qué condiciones tiene que cumplir un subconjunto no vacío de un espacio vectorial para que sea un subespacio vectorial de éste? Pon un ejemplo.

La mayoría de estas cuestiones suponen un repaso de las distintas nociones estudiadas en el tema: subespacios vectoriales, combinación lineal o dependencia e independencia lineal. En cuanto a los ejercicios propuestos (pag 43 y 44), son similares a los resueltos durante la exposición del tema, aunque alguno tiene un poco más de dificultad.

8- Sea el espacio vectorial R^2*. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos constituyen subespacios vectoriales con las operaciones inducidas?*

$A = \{(x,y) \,/\, x\text{-}y = 0\}$

$B = \{(x,y) \,/\, x\text{-}y = 1\}$

$C = \{(x,y) \,/\, x+y = 0\}$

$D = \{(x,y) \,/\, x = 1\}$

$E = \{(x,y) \,/\, xy = 0\}$

Destacamos este ejercicio por dos razones: la primera es por la expresión "operaciones inducidas". Este término ya aparecía en la introduccción teórica de subespacio vectorial, pero consideramos que puede ser de difícil comprensión para el alumno. En cuanto a ver si un conjunto es o no subespacio vectorial, el libro presenta tres ejemplos, uno de ellos similar a los aquí presentados, pero en ellos no aparece ninguna operación ni se justifica por qué la suma y el producto por un número son operaciones internas en el conjunto. Por tanto, este ejercicio puede originar conflictos, tanto por el lenguaje utilizado como por no contar con las herramientas necesarias para resolverlo.

Comienza en la unidad 3 el estudio de matrices, con una pequeña introducción histórica. Se señala que el desarrollo inicial de la teoría se debe a William Hamilton. Se menciona la utilidad de estos objetos, pero no cómo surgen a partir de los sistemas de ecuaciones lineales o de las aplicaciones lineales. Sí que se dice que Cayley, en 1858, introdujo la notación matricial como una forma abreviada de representación de un sistema de m ecuaciones con n incógnitas.

La unidad sigue pautas similares a las anteriores: exposición teórica intercalando ejercicios resueltos, cuestiones, y ejercicios y problemas propuestos. Para definir el concepto de matriz se introducen primero las listas numéricas (conjunto de números dispuestos uno a continuación del otro) y las tablas numéricas, estas últimas con un ejemplo. No se menciona qué tipo de números pueden ser los elementos de una matriz, aunque en el ejemplo utilizado con las listas numéricas aparecen números negativos y una fracción. También se pone como ejemplo de matriz un tablero de ajedrez; se presenta como una matriz de 8 filas y 8 columnas, siendo sus elementos las distintas filas. Esto puede generar un conflicto a la hora de definir las operaciones: ¿Cómo se suman dos matrices si sus elementos son piezas de ajedrez?

Esta sección termina con la igualdad de matrices, definiéndola a partir de la de vectores.

Se describen ahora algunos tipos de matrices. Para ello se hacen dos grupos: atendiendo a la forma y a los elementos. En el primer grupo tenemos matriz fila, matriz columna, cuadrada, rectangular, traspuesta, simétrica y antisimétrica. En el segundo grupo, matriz nula, diagonal, escalar, identidad y triangular. Además, se presentan ejemplos de todas ellas, y se introducen los conceptos de diagonal principal y secundaria.

Las operaciones suma y producto por un número real aparecen asociadas a la noción de espacio vectorial. Ambas operaciones se presentan como una generalización de las mismas asociadas a vectores; tras presentar un ejemplo de cómo se realizan estas operaciones con vectores se da otro ejemplo con matrices, lo que resulta visual para los alumnos. A continuación se dan las definiciones teóricas de estas operaciones, y sus propiedades. Además se introduce la notación $\mathbf{M_{m\times n}(R)}$ para denotar el conjunto de todas las matrices de m filas y n columnas en las que sus elementos son números reales. Este conjunto tiene estructura de grupo abeliano con la suma y de espacio vectorial con la suma y el producto por un escalar. También se define la diferencia de matrices.

Como ejercicios resueltos se presenta una operación con matrices, un sistema matricial y una demostración de que un conjunto de cuatro matrices es una base de $M_{2\times 2}(R)$. Esta última actividad se resuelve en dos partes: por un lado se ve que es un sistema generador, y por otro que son linealmente independientes.

Para introducir el producto de matrices se plantea primero el producto de una matriz fila por una matriz columna, que se fundamenta en el producto escalar de dos vectores de R^2. Además, se introduce el producto escalar (usando coordenadas) de dos vectores de R^3. Destacaremos este apartado por alejarse de la formalidad que presentan otros. Así, se presenta el siguiente ejemplo como interpretación del producto escalar.

"Si compramos 3 kg de lentejas a 120 pts/kg, 2 de garbanzos a 250 pts/kg y 7 de alubias a 150 pts/kg, podemos considerar (3,2,7) como el vector compra y (120,250,150) como el vector precio; el coste total del pedido será entonces
(3,2,7)·(120,250,150) = 3·120+2·250+7·150 = 1910 pts"

Según el texto, la operación que caracteriza y hace original el cálculo matricial es el producto de matrices. Antes de dar la definición formal se comenta que la multiplicación *no tiene por qué estar definida, y, si lo está, no tiene por qué ser conmutativa*, expresión que puede resultar muy extraña a los estudiantes. A continuación se da la definición y se ilustra con un ejemplo, para pasar a dar las propiedades y la estructura de $M_n(R)$ con este producto.

El ejemplo muestra la multiplicación de dos matrices 2×2 y además un diagrama con cajas rectangulares, donde explica que multiplicando escalarmente la fila 2 por la columna 3, se obtiene el elemento que ocupa la fila 2, columna 3, del producto (c_{23}).

Al estudiar las propiedades se introduce el concepto de matriz inversa, aunque no se comenta nada acerca de su cálculo.

A continuación se resuelven ejercicios de aplicación, para intentar consolidar el aprendizaje. En uno de ellos se pide hallar la matriz inversa de otra dada aplicando la definición. En la tarea 4 aparece un problema práctico, planteando una situación donde hay que aplicar un tratamiento a cuatro pacientes. Este tratamiento consta de tres compuestos. Se trata de hallar qué cantidad de cada compuesto necesita el hospital para cubrir sus necesidades. Con esta actividad se ilustra el producto de matrices con un caso práctico.

El método de Gauss vuelve a aparecer en el apartado siguiente, donde se habla del rango de una matriz. Se toma una matriz 3×4, mostrando que las filas se pueden tomar como un conjunto de tres vectores de cuatro componentes, y las columnas como un conjunto de cuatro vectores de tres componentes. Se menciona (sin demostrar) que el rango por filas de una matriz es igual al rango por columnas.

Para calcular el rango, se exponen las transformaciones elementales de filas o columnas que dejan invariante el rango, procurando que esta explicación no sea demasiado formal. Se completa este apartado con tres ejercicios resueltos donde se pide hallar el rango de una matriz por el método de Gauss.

Todo lo estudiado en el tema se evalúa con 19 cuestiones. Encontramos algún problema con el lenguaje empleado en la actividad siguiente:

11- Se considera la matriz D = Diag (3,1,1). ¿Cómo actúa D al multiplicarla por una matriz cualquiera A? Compruébalo con una matriz de orden 3.

No se indica qué significa la notación Diag (3,1,1), ya que no ha aparecido a lo largo del tema. El alumno puede interpretar que será una matriz en la que los elementos de la diagonal valgan 3,1,1, y que, por tanto, será cuadrada de orden 3, pero le quedará la duda sobre el resto de los elementos.

Aparecen también cuatro cuestiones sobre matriz inversa, concepto que había sido introducido con las propiedades del producto de matrices, dando sólo su definición y el cálculo aplicando esta definición. En nuestra opinión, estas preguntas dan la oportunidad al alumno para que reflexione sobre este concepto. Sin embargo, nos parecen un poco complicados para lo que conoce el alumno en este momento, por lo que no podría conectar los nuevos conocimientos con los anteriores.

Se echa de menos, en estas situaciones, una cierta aplicación al entorno social del alumno. Todas las cuestiones versan sobre aspectos matemáticos teóricos, pero en ningún caso se plantea ningún tipo de actividad práctica, como por ejemplo: ¿para que crees que pueden servir las matrices?

En los ejercicios propuestos encontramos principalmente rutinas de cálculo para afianzar las distintas operaciones. Destacaremos el problema:

10- Demostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *satisface la relación de recurrencia* $A^n = 2^{n-1} \cdot A$

Surge la siguiente pregunta: ¿Sabe el alumno lo que es una relación de recurrencia? El tema de sucesiones se estudiaba en el antiguo BUP en 2º curso, por lo que probablemente los estudiantes no recordarán, con precisión, sus contenidos. Tampoco se han utilizado métodos de demostración, como por ejemplo, inducción, que es el necesario en este problema. Por tanto, consideramos que el alumno no podría resolver este ejercicio sin ayuda del profesor (que, además, se vería obligado a introducir y/o relacionar nuevos objetos). En el ejercicio 11 se pide el cálculo de una potencia n-ésima, encontrándonos con el mismo caso que en el ejercicio 10.

Los siguientes ejercicios propuestos son sobre matriz inversa, cálculo del rango según los valores de un parámetro y demostraciones sobre diversos resultados. El último problema es similar al planteado en las tareas resueltas en el apartado del producto de matrices, sobre los tratamientos aplicados en un hospital a cuatro pacientes.

Se comienza el tema de determinantes presentando las distintas secciones de manera similar a las unidades anteriores y añadiendo una pequeña introducción, en la que se explica la limitación del método de Gauss para expresar las condiciones de compatibilidad y determinabilidad de un sistema en función de los coeficientes y de los términos independientes.

Tras una breve reseña histórica en la que se menciona que los determinantes de 2º y 3º orden se construyeron para expresar las soluciones de un sistema de una forma fácil de recordar, se pasa a definir el determinante de una matriz cuadrada de orden dos:

Dada la matriz cuadrada de 2º orden $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *se llama determinante de A al número real*

$$det\ (A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Se presentan algunas notaciones distintas: det (F_1,F_2), det (C_1,C_2) o det (u,v) siendo u y v vectores. También se comenta cuánto vale el determinante de la matriz nula, matriz unidad, matriz diagonal o matriz triangular.

Los ejercicios resueltos comienzan con el cálculo de determinante 2×2. Además se demuestra que si dos vectores son dependientes su determinante es cero.

El determinante de 3º orden se define de modo similar que el de 2º orden. Para calcularlo se aplica la Regla de Sarrus. Este algoritmo no se justifica, peor se da una breve explicación que permitirá recordarla más fácilmente Se introducen las mismas notaciones que en el apartado anterior y el cálculo de las mismas matrices: nula, unidad, diagonal y triangular.

Los ejercicios resueltos presentan un esquema similar a los anteriores: cálculo de determinantes 3×3 y ver que si tres vectores son linealmente dependientes su determinante es 0. La diferencia es que ahora se dan tres vectores, en vez de demostrarlo en un caso general.

Antes de introducir los determinantes de orden *n*, se hace un pequeño análisis de los cálculos hechos con los determinantes de orden dos y tres, viendo que cada término del desarrollo es el producto obtenido de tomar un único elemento de cada fila y de cada columna, y que el signo de cada término depende de la elección del orden de las columnas.

Se definen las *permutaciones* de *n* números naturales como todas las ordenaciones posibles de los mismos. El libro ilustra este concepto presentando tres cartas de una baraja y todas las formas diferentes de colocarlas. Hay que hacer notar que en el currículo de BUP se estudiaba la combinatoria, por lo que, probablemente, el alumno ya estará familiarizado con el concepto de permutación y sólo habrá que recordárselo. Se recuerdan definiciones como permutación principal, invertida, par e impar, antes de pasar a las permutaciones de columnas o filas en los determinantes, refiriéndose a las permutaciones de los subíndices.

La definición de los determinantes de orden n se da de una forma teórica, comentando cómo se toman los términos de su desarrollo y qué criterio se sigue para anteponer un signo u otro. Sigue una serie de observaciones entre las que se comentan aspectos similares a los determinantes de orden 2 y orden 3 (notaciones, matriz traspuesta, nula…).

En los ejercicios resueltos observamos para empezar dos cuestiones en las que se pregunta qué signo tiene un término dado del desarrollo de un determinante. También se propone calcular, aplicando la definición, varios de estos objetos. El primero corresponde a una matriz triangular por lo que no representa gran dificultad, pero veamos los siguientes:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

En el primero de ellos, calculándolo a partir de la definición, se deduciría que el único término no nulo es el producto de los unos, lo que corresponde a una multiplicación donde se toma un elemento de cada fila y uno de cada columna. En el segundo caso esto no es tan evidente y para un alumno, que no tiene práctica pues son los primeros ejercicios de este tipo que se realizan, puede resultar especialmente difícil. De hecho, en el sentido de Pérez (1994) podríamos clasificar esta actividad como un problema complejo en este momento de estudio.

A continuación se presenta el determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

y otro de estructura similar pero de orden 6. La solución que se ofrece es:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 5 = 35$$

Si volvemos a la definición dada en el texto para el determinante de orden n vemos que en ningún momento aparece un objeto de esta forma ni se presenta el cálculo como el producto de dos determinantes de orden inferior. La exposición del libro tampoco justifica el proceso:

Cada término del desarrollo se obtiene eligiendo dos factores de las dos primeras filas y columnas y otros dos de las dos últimas filas y columnas, pues los demás son nulos.

El apartado 3 se dedica a las propiedades de los determinantes, justificándose su utilidad como nuevos métodos para obtener el valor de un determinante de forma más rápida. Se presentan en dos bloques: propiedades y operaciones y propiedades y valores de los determinantes.

El primer bloque comprende tres propiedades: cómo sumar determinantes, cómo multiplicarlos por un número y cómo calcular el determinante de un producto de matrices. Con cada propiedad se presenta un ejemplo.

Las siete propiedades restantes se presentan en *propiedades y valores de los determinantes*. En ellas se puede ver qué pasa cuando dos filas o columnas se intercambian, cuando hay una fila con todos los elementos nulos o cuando es combinación lineal de otras paralelas, entre otros aspectos. Se indica además que cuatro de las propiedades presentadas podrían resumirse en: si el rango de una matriz cuadrada A de orden *n* es menor que *n*, su determinante es 0. Esta afirmación no se justifica y, aunque ya se había estudiado el cálculo del rango de una matriz por el método de Gauss en la unidad correspondiente a matrices, todavía no se ha planteado cómo calcular el rango de una matriz o de un conjunto de vectores usando determinantes. Por tanto, el alumno tendría que realizar el esfuerzo de relacionar lo estudiado anteriormente sobre el rango de una matriz con la afirmación expuesta aquí.

El apartado 4 lleva por título *Cálculo de un determinante por el método de Gauss*. Para empezar el libro hace referencia a tres de las propiedades estudiadas en el apartado anterior para realizar las operaciones necesarias para conseguir que todos los elementos de una fila o una columna sean 0 excepto uno de ellos.

Se distingue la reducción total y parcial. En la total el texto se refiere a las unidades 1 y 3, donde se utilizaba el método de Gauss para reducir un sistema de ecuaciones lineales y para calcular el rango de una matriz, respectivamente. En la reducción parcial se comenta que el proceso puede darse por terminado cuando el siguiente determinante a reducir sea de 2º o 3º orden, en cuyo caso se realiza el producto de los elementos de la diagonal principal del determinante reducido por el determinante sin reducir. Esto se ilustra con el cálculo de tres determinantes, en los que se indican los pasos sin comentarios, por lo que ha de ser el alumno quien averigüe qué operaciones se realizaron en cada paso.

Se presenta, a continuación, el cálculo de un determinante por los elementos de una fila o columna. Para ello se comienza definiendo la matriz complementaria del elemento a_{ij}, y se define adjunto de a_{ij} como el determinante de esta matriz complementaria. Para exponer bien estos conceptos se presentan matrices cuyos elementos son asteriscos y se sombrean aquellos elementos que representan el adjunto de un elemento dado. Luego se indica el desarrollo de un determinante de orden 4 por los elementos de la primera fila.

$\det(A) = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}$

entendiendo por A_{1j} los adjuntos correspondientes a los elementos de la primera fila de la matriz A:

$A_{11} = \det(M_{11})$, $A_{12} = -\det(M_{12})$, $A_{13} = \det(M_{13})$, $A_{14} = -\det(M_{14})$

y por M_{1j} el determinante que se obtiene al suprimir la fila 1 y la columna j.

Se comenta además que este procedimiento es válido para cualquier fila y columna.

Los ejercicios resueltos consisten en el cálculo de dos determinantes de orden 4 y uno de orden n. Señalar que en estas tareas no se aplica directamente el método espuesto, sino que primero se hacen ceros en la primera fila o columna por el método de Gauss, por lo que, mas que desarrollar por una fila o columna, lo que se hace es rebajar el orden del determinante.

En la página siguiente (llamada parte B de la unidad), se indican aplicaciones de estos objetos (cálculo del rango de una conjunto de vectores y de una matriz por determinantes, cálculo de la matriz inversa por determinantes), señalando que se emplearán en este capítulo y en el siguiente (sistemas de ecuaciones lineales). Se presentarán tres situaciones que se pueden desarrollar mediante el método de Gauss, pero se afirma que a veces es más rápido aplicar el método que se basa en los determinantes o un método mixto.

Se recuerdan las definiciones del rango de un conjunto de vectores y de una matriz, y las propiedades de los determinantes, necesarias en este apartado. Se menciona que conviene usar una matriz para calcular el rango de un conjunto de vectores, construyéndola de modo que cada vector sea una fila o columna.

Se describe a continuación el método a seguir indicando para empezar qué filas o columnas se pueden suprimir para evitar cálculos. El procedimiento se expone con tres esquemas, que representan a matrices 2×5, 3×5 y 4×5, pero no queda suficientemente aclarado cómo hacer este cálculo. Además no se contemplan todos los casos: por ejemplo, en el caso de la matriz 4×5 se comenta cómo saber si el rango es 4 o 3, pero no se analiza el caso de que fuese 2 o 1. Además se indica que hay que elegir tres columnas que sean independientes, pero esto puede que no resulte sencillo. Así, si C_3 fuese $7C_1-\frac{3}{4}C_2$, la dependencia lineal no sería evidente.

Una actividad es calcular el rango de una matriz, y por último, se pide determinar el rango de una matriz 3×3 según los valores de un parámetro *a*. Aunque las soluciones que presenta el libro son bastante claras para alguien experto, no lo son para el principiante, por lo que es de suponer en este apartado la presencia del profesor para completar la explicación del manual, ofrecer un método sistemático del cálculo del rango y facilitar la comprensión de los estudiantes. La matriz de la cual se pide calcular el rango es $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$. El libro da como resultado del determinante $(a-1)^2(a+2)$, sin especificar los pasos intermedios necesarios para llegar a este resultado. Un alumno inexperto desarrollaría el determinante utilizando la regla de Sarrus y llegaría a un polinomio de tercer grado como solución. Expresar este polinomio de la forma planteada en el libro de texto exigiría descomponerlo aplicando la regla de Ruffini, estudiada en cursos anteriores. Por tanto, implícitamente se le pedirían dos cosas al estudiante: saber utilizar la regla de Ruffini y saber que tiene que usarla en este caso.

A continuación se presenta el cálculo de la matriz inversa utilizando determinantes. Se comienza el apartado diciendo que el método que se va a presentar resulta engorroso y pesado para matrices de orden superior a tres por la cantidad de operaciones que hay que realizar. Se define primero la matriz adjunta, como la matriz que se obtiene sustituyendo cada elemento por su adjunto correspondiente, y se indica por Adj (A). Se da un ejemplo del cálculo de la adjunta, y las propiedades que relacionan las filas de la matriz A y de Adj (A). Estas propiedades conducen a que el producto $A \cdot {}^t\mathrm{Adj}(A)$ es una matriz diagonal, lo que nos llevará en el apartado siguiente a calcular la matriz inversa de A.

Los ejercicios resueltos son tres: en los dos primeros se trata de calcular la matriz inversa de una matriz 2×2 y otra 3×3. En el tercero se pretende resolver una ecuación matricial. Este podría ser considerado un problema en el sentido de Pérez (1994), ya que se combinan conocimientos de los temas estudiados (operaciones con matrices, imposibilidad de usar la propiedad conmutativa, cálculo de la matriz inversa) por un lado, y por otro se plantea al alumno una situación nueva para él. Sin embargo, una vez comentado y analizado, el problema se convertirá en un ejercicio rutinario.

Las actividades propuestas se dividen, como en las demás unidades, en “cuestiones” y “ejercicios y problemas”. Muchas de estas cuestiones tratan del concepto de permutación, planteando términos de diversos determinantes y preguntando qué signo tienen. Sin embargo, las que vienen marcadas como cuestiones de Selectividad son sobre las propiedades de los determinantes, y algunas sobre la matriz inversa.

Destacaremos la última cuestión:

24- Si A es una matriz cuadrada de orden 3, ¿cuánto vale el determinante de la matriz Adj (A)? (recuerda que det (A)·det(Adj(A)) = det (A)^3)

Según los autores, esta cuestión proviene de un examen de Selectividad. Lo curioso de la tarea no es la pregunta que plantea, sino la indicación que da. Al comenzar con las palabras *recuerda que* se puede pensar que es una propiedad ya conocida y estudiada por el alumno, pero no es así. Que det (A)·det(Adj(A)) = det (A)^3 debe deducirse de $\frac{1}{\det(A)} \cdot A \cdot {}^t\mathrm{Adj}\,(A) = 1$ (entendiendo este 1 que utiliza el libro como notación como la matriz identidad), aplicando las propiedades de los determinantes. Posiblemente, al alumno le resultará más complicado comprender esta indicación que contestar la pregunta.

Se plantean ahora 40 actividades más. De ellas 11 pueden ser consideradas problemas. El resto son ejercicios en los que hay que aplicar técnicas y rutinas básicas. De todas formas, ninguno de estos problemas tiene una aplicación práctica a situaciones contextualizadas, sino que están dentro del propio campo de las matemáticas. En el tema siguiente, sistemas de ecuaciones lineales, el alumno podrá ver como aplicar determinantes pero no será capaz de ver la utilidad del cálculo de determinantes de orden *n*, que además resultan difíciles para él, como por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{vmatrix} 1 & n & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & n & \dots & n \\ n & n & 3 & n & \dots & n \\ n & n & n & 4 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & n & n & n \end{vmatrix}$$

En este momento, las matrices y determinantes dejarán de tener “vida propia” para ser objetos al servicio de la discusión y resolución de sistemas. Se presenta al principio un pequeño resumen de lo que va a ser el tema, mencionando además que se proporcionará un método sencillo, rápido y elegante para analizar las distintas posiciones que adoptan en el plano y en el espacio las figuras lineales (rectas y planos) asociadas a las ecuaciones de un sistema (capítulo 6 del libro).

Se enfatiza en la notación adecuada de un sistema. Para ello se habla de una notación *ordinaria*, una notación matricial y una notación vectorial. Hay que recordar una vez más que este es un Curso de Orientación Universitaria y por tanto, aparte de comprender los significados más elementales de los objetos matemáticos y las rutinas sistemáticas, también es muy importante el lenguaje y escritura empleados, cara a fijar un "idioma matemático" que permita al alumno continuar sus estudios. Las actividades resueltas ayudan a fijar esta notación.

Se recuerda el concepto de sistemas equivalentes y los criterios de equivalencia, que ya habían sido estudiados en la unidad 1.

Encontramos en el apartado 3 el teorema de Rouché, enunciado también como criterio de compatibilidad. Una vez que se presenta se pasa a demostrar de manera formal. Recordemos que, a diferencia de los exámenes de Selectividad actuales, las demostraciones de los teoremas eran objeto de examen, por lo que el libro ha de plantear obligatoriamente una formalidad que actualmente no sería necesaria (aunque muchos textos la siguen planteando).

Entre las observaciones se distingue si la solución es única o existen infinitas soluciones (las expresiones "compatible determinado" e "indeterminado" no se utilizan, pero ya habían sido recordados al principio del tema). Se estudia, además, cómo resolver un sistema con infinitas soluciones, pero sólo teóricamente, sin plantear ningún ejemplo. Se llama r al rango de la matriz del sistema y se dice que se pasan al segundo miembro las últimas $n\text{-}r$ incógnitas, pasándose a designar con los símbolos $t_1,\ldots,t_{n-r}$, que son parámetros. Nos parece que introducir así la resolución de sistemas indeterminados es especialmente difícil, por la notación empleada. El alumno no está demasiado familiarizado con la escritura formal, y, por otro lado, en la unidad 1 (pag 20) ya se habían resuelto sistemas indeterminados por el método de Gauss, por lo que bastaría con remitirse a este ejemplo antes de la explicación teórica. Se sobreentiende aquí la labor del profesor para enlazar los conocimientos que ya tenían los alumnos sobre sistemas con los nuevos.

Se puede plantear también una confusión con la nomenclatura, al introducir el término *parámetro*, entre sistemas y soluciones que dependen de un parámetro. En este apartado se habla de ambas cosas, sin comentar la diferencia, y ambas, también, se encuentran en los ejercicios resueltos, donde se estudia la compatibilidad y número de soluciones de cinco sistemas, dos de ellos dependiendo de un parámetro.

El siguiente apartado nos lleva de nuevo al método de Gauss, recordando la unidad 1, y generalizándolo para un sistema de n ecuaciones con n incógnitas. No se contempla en esta exposición el caso de que el número de ecuaciones e incógnitas sea diferente, aunque en el primer tema (pag 20) se había utilizado el método de Gauss para discutir un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas. Sorprende en los ejercicios resueltos la notación utilizada: pese a haber estudiado ya las matrices y cómo escribir un sistema de forma matricial, el libro hace la reducción por Gauss directamente con las ecuaciones, sin la notación matricial, del mismo modo que se hacía en la unidad 1.

Por último, aparece la resolución de sistemas por determinantes o método de Cramer, comenzando el apartado con la definición de sistema de Cramer, para presentar la regla que da directamente las soluciones del sistema. Una vez que se describe la técnica se demuestra cómo obtener las fórmulas, basándose en propiedades de los determinantes.

Finaliza con una serie de ejercicios complementarios resueltos. En dos de ellos tan solo se ilustra cómo aplicar la regla de Cramer, con un sistema 2×2 y uno 3×3. Los otros dos son problemas que requieren modelizar algebraicamente una situación real.

3- Un cuerpo está constituido por la aleación de dos metales de densidades conocidas; la composición cuantitativa es desconocida. Arquímedes calculó esta composición midiendo los empujes en dos fluidos (o gases) de distinta densidad.

Sean c_1 y c_2 las densidades de los metales componentes y m_1 y m_2 las de los fluidos (o gases). Sean a_1 y a_2 las diferencias entre peso y empuje y x_1 y x_2 las partes volumétricas desconocidas que se quieren determinar. Plantear el sistema que permite obtener estas cantidades volumétricas.

4- Aplicación de los sistemas lineales a las reglas de Kirchoff. Sea la red de corriente representada en la figura [...]. *Para mayor sencillez, se ha supuesto que en este circuito no existen fuerzas electromotrices.*

Como vemos, estos problemas requieren conocimientos para resolverlos que están fuera del campo de las matemáticas y que es posible que el alumno no conozca, sobre todo si no cursa las materias de Física o Química.

En el primer problema (balanza de Arquímedes) sólo se pide plantear el sistema, que es lo realmente difícil, ya que es posible que no se tengan los conocimientos necesarios para hacerlo. El libro presenta el sistema y luego comenta qué se tiene que cumplir para que el sistema sea de Cramer.

En cuanto al segundo problema, se recuerdan en un apartado las reglas de Kirchoff, por lo que el alumno que ya las conocía anteriormente podrá entender la resolución del sistema. Si estas leyes no han sido estudiadas no se conocerán conceptos como malla, nudo, intensidades o resistencias.

El problema no se resuelve, tan sólo se plantean las ecuaciones. Conociendo las resistencias se tendría un sistema de seis ecuaciones y seis incógnitas. Si estas resistencias no se conocen, el sistema no sería lineal.

La lección finaliza con la misma estructura presentada en unidades anteriores. Comienza con 11 cuestiones, para presentar después 31 ejercicios y problemas. En toda esta colección de actividades no encontramos ninguna situación extramatemática, pese a que el tema se presta mucho a ello. Estas situaciones, sin embargo, sí que aparecían en la unidad 1, por lo que el libro presenta ahora solamente ejercicios donde se practican las técnicas aprendidas y se fija un lenguaje matricial aplicado a los sistemas de ecuaciones.

4.3.2. Conclusiones del análisis del libro de texto de COU.

Este libro de texto se presenta como un material de consulta y como colección de problemas propuestos. Su importancia radica en la selección de unos contenidos frente a otros y a su forma de estructurarlos, que hará que los estudiantes conciban el Álgebra Lineal de una manera determinada. El currículo que dirigía las enseñanzas de COU en estos años era muy vago, como ya se vio en el capítulo 3.4, por lo que el saber a enseñar estará muy influenciado por el manual elegido.

En el análisis del libro de texto hemos encontrado las siguientes cuestiones:

El manual analizado se adapta a la exigencia de programabilidad de los saberes organizándolos de forma lineal y secuenciada. Observamos además que la estructura general con la que estos autores confeccionan los temas se adapta al modelo teoría-práctica. Primero existe una presentación de las nociones matemáticas que el alumno deberá retener (y, si es posible, comprender), seguida de ejercicios preparados exclusivamente para que el estudiante pueda reconocerlas y utilizarlas sin apenas tener que realizar ningún tipo de transformación. Esta estructura se encontrará posteriormente en libros LOGSE (Colera, García, Oliveira, 2003) y en libros LOE (Vizmanos, Hernández, Alcalde, 2009).

El libro comienza cada tema sin exigir una reflexión previa sobre los contenidos que se van a estudiar. Se presentan directamente los resultados sin plantearse la necesidad de estos objetos. Además, tampoco se introducen actividades para que las resuelva el alumno a lo largo de la lección, sólo al final del tema es cuando el alumno ha de reflexionar sobre lo aprendido, por lo que la mayoría de las dudas aparecerán aquí. Recordemos que Dorier y Siepinska (2001), advertían de dos tipos de dificultades a la hora de que el estudiante entendiera los conceptos del Álgebra Lineal: las dificultades epistemológicas y las cognitivas, es decir, las dificultades derivadas directamente de la naturaleza propia del Álgebra Lineal y las derivadas del tipo de pensamiento requerido para entender dichos conceptos.

Las definiciones, propiedades y procedimientos se plasman en un lenguaje formal. Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (2000) señalaban que era precisamente este lenguaje formal la queja principal de los estudiantes cuando se enfrentaban a los contenidos del Álgebra Lineal. El examen de Selectividad de COU presentaba preguntas teóricas, no sólo definiciones y resultados, sino también pequeñas demostraciones, por lo que resultaba necesario definir los conceptos con rigor y acostumbrar al alumno al manejo de un lenguaje y una notación matemática adecuada.

Aunque no se hace de manera explícita, el libro recuerda algunos conceptos estudiados en cursos anteriores. Por ejemplo, en la página 16 se explica el método de Gauss y se le llama también método de reducción. Además se dice que los algoritmos clásicos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales son los de reducción, sustitución e igualación. El alumno conoce estos métodos de resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas y esto no se recuerda aquí ni se relaciona con los sistemas de orden mayor. Sin embargo, a la hora de presentar los ejercicios resueltos sí que se hace, presentando primero tres sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas y pidiendo que se resuelvan por reducción, para pasar a resolver por esta misma reducción o método de Gauss sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas.

El tema de espacios vectoriales tiene su lugar propio en la unidad 2, definiendo conceptos como subespacios vectoriales, combinación lineal de vectores, subespacio engendrado, base y aplicación lineal. Esta unidad desaparecerá posteriormente en el currículo LOGSE, y en otros países, como Francia, su desaparición fue anterior (Dorier, Robert, Robinet y Rogalski, 2000)

Las matrices son introducidas en la unidad 3, partiendo de listas y tablas numéricas. En este tema abundan ejemplos (algunos poco afortunados, como utilizar un tablero de ajedrez como ejemplo de matriz) y ejercicios resueltos que ilustran los tipos de matrices y las operaciones que podemos realizar con ellas. Las operaciones suma de matrices y producto de una matriz por un número real se presentan como una generalización de las mismas asociadas a vectores.

Es de destacar en este tema que se menciona lo que realmente hace importante a las matrices dentro del campo de las matemáticas, al menos a juicio de los autores: el producto de matrices, que se considera la operación que caracteriza y hace original el cálculo matricial, ya que no tiene por qué estar definida y no tiene por qué ser conmutativo.

La unidad 4, correspondiente a determinantes, se caracteriza sobre todo porque no presenta ninguna actividad que intente salir del campo de las matemáticas. Ya sea ejercicio o problema, con mayor o menor dificultad, nos encontramos con situaciones abstractas, por lo que el alumno, al finalizar el estudio del tema, podrá tener una destreza en el cálculo de determinantes y en el manejo de sus propiedades, pero no tendrá una idea clara del significado de este objeto matemático.

Del mismo modo, la última unidad también presenta sus resultados de manera formal y abstracta, siendo las únicas situaciones "no matemáticas" demasiado complicadas para el nivel del alumnado.

Podemos decir que el análisis del libro de texto nos muestra que el tratamiento dado al Álgebra Lineal se caracteriza por ser especialmente "matemático", en el sentido de que no se muestran actividades que relacionan estos objetos con otros campos de problemas. Sin embargo, ya en el momento de vigencia del COU, un importante número de facultades incorporaban asignaturas de Álgebra en su currículo. Ortega (2002, pp. 84) presenta una relación de estudios universitarios en los que hay presencia de asignaturas de Álgebra, o de asignaturas con la denominación general de Matemáticas y que engloban contenidos de Álgebra Lineal. Aunque esta relación corresponde a planes de estudios más modernos, en la época de vigencia del COU encontrábamos los mismos contenidos, aunque con otras denominaciones, lo que significaba la aplicación directa de los contenidos del Álgebra Lineal en diferentes campos del saber. Sin embargo, los libros de texto de secundaria no plantean ninguna relación entre el Álgebra Lineal y otras disciplinas.

Los contenidos se presentan con más formalidad que en cursos anteriores pero, en nuestra opinión, adaptados a aquello a lo que puede llegar el alumno. De todas formas, reocordamos nuevamente que autores como Ortega (2002) o Dorier y Siepinska (2001) achacaban a esta formalidad en la presentación de los contenidos parte del fracaso de los estudiantes en esta materia.

Se presentan actividades suficientes para que el alumno pueda ejercitar los algoritmos aprendidos, lo que le será especialmente útil a la hora de estudiar la geometría. Además, también se le plantean cuestiones que le obligan a reflexionar sobre lo estudiado.

Encontramos un posible conflicto semiótico en el hecho de que se utilizan términos que se consideran sabidos por el alumno, pero que normalmente no lo son. Es el caso, entre otros, de *sistema equivalente* (explicado un poco después en el texto), *solución trivial* o *discusión de un sistema*.

El tema de espacios vectoriales constituye un contenido propio, lo que propicia un enfoque formal de los objetos estudiados, como señalábamos en la hipótesis H1.

4.4. *Análisis del significado de referencia del Álgebra Lineal en un texto de 2º de bachillerato (LOGSE)*

En esta sección realizamos el estudio del significado de referencia escolar del Álgebra Lineal en Galicia, en la enseñanza-aprendizaje de las matrices y determinantes en el nivel de 2º de Bachillerato, centrándonos en el análisis de libros de texto usados actualmente. La hipótesis que guía nuestro examen es que, aunque el tema de espacios vectoriales no se estudia como tal, encontramos abundantes elementos de dicho tema, en las definiciones de las operaciones planteadas con matrices. Hay que señalar que la última reforma (LOE) no modifica los contenidos del Álgebra Lineal, por lo que este estudio también sería válido para esta etapa.

El texto que vamos a analizar es: Matemáticas II (Colera, García, Oliveira, 2003). Este es el libro de texto usado en el IES Monte da Vila, donde se realiza este estudio.

El libro divide el bloque de Álgebra en cuatro capítulos:

- Sistemas de ecuaciones. Método de Gauss.
- Álgebra de matrices.
- Determinantes.

- Resolución de sistemas mediante determinantes.

El libro LOE, de la misma editorial (Colera, Oliveira, 2009), no supone ninguna variación en el reparto de las unidades didácticas.

El estudio del Álgebra comienza en la página 28 del libro con una breve exposición de la resolución de sistemas de ecuaciones en la China antigua, pasando a un pequeño repaso sobre ecuaciones y sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. Se pretende que el alumno llegue al concepto de ecuaciones equivalentes, presentando las ecuaciones

$2x+y = 5$

$4x+2y = 10$

y pidiéndole que las represente gráficamente.

La segunda actividad presenta las ecuaciones

$2x+y = 5$

$x-y = 1$

$x+2y = 4$

y pide también que se representen, viendo que la tercera ecuación se deduce de las otras dos, y por tanto es superflua a la hora de hallar el punto en común.

La última actividad da las ecuaciones

$2x+y = 5$

$2x+y = 7$

y también pide representarlas. En este caso las rectas son paralelas, por lo que el alumno se enfrentará al concepto de sistema incompatible.

La realización de esta actividad por parte de los alumnos supone que ya están familiarizados con conceptos como “ecuación lineal con dos incógnitas” y con la relación que hay entre dicha ecuación y una recta en el plano. Estos objetos son estudiados en 4º de ESO. Por otro lado el concepto de solución de un sistema de ecuaciones no se menciona, aunque en la segunda actividad encontramos que las tres rectas se cortan en el mismo punto.

En la página 30 comienza el apartado de “Sistemas de ecuaciones lineales”. Se pone un ejemplo de diversas ecuaciones lineales con una, dos, tres y cuatro incógnitas, diciendo que tienen la peculiaridad de que son polinómicas de grado uno. El alumno ya conoce las de primer y segundo grado, aunque es probable que la de dos incógnitas la asocie a un sistema de ecuaciones y no la reconozca como ecuación independiente. Indica que para que la ecuación sea lineal, las incógnitas no están elevadas a ninguna potencia, ni multiplicadas entre sí, ni bajo radicales, ni en el denominador. Se ponen ejemplos de ecuaciones no lineales. Además, se menciona que una ecuación lineal con dos incógnitas representa una recta en el plano, y con tres incógnitas representa un plano en el espacio.

En esta página se definen ecuaciones equivalentes, como aquellas que tienen la misma solución. También se define sistema de ecuaciones lineales, y da una interpretación geométrica (sin llamarla de esa forma) de la solución de un sistema con dos y tres incógnitas. Quizás esta interpretación en este punto es innecesaria, pero prepara la introducción en temas posteriores de la geometría en el espacio.

Se presenta el concepto de sistemas de ecuaciones equivalentes, como aquellos que tienen la misma solución. Por último, se exponen las transformaciones válidas en un sistema de ecuaciones, ilustrando cada una de ellas con un ejemplo. El trabajo del alumno comienza viendo si cuatro parejas de sistemas son equivalentes, utilizando las transformaciones explicadas.

En la página 32, aparecen los "sistemas de ecuaciones con solución y sin solución", definiendo sistemas compatibles e incompatibles, determinados e indeterminados. Se presenta la interpretación geométrica de sistemas de ecuaciones con dos y tres incógnitas. Se trata, por tanto, de relacionar los sistemas de ecuaciones con las rectas y planos en el espacio. Las actividades se refieren a resolver e interpretar geométricamente un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas y sistemas de tres ecuaciones y tres incógnitas. Otra actividad presenta un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas y se pide al alumno que añada una ecuación para que el sistema sea compatible y otra para que sea incompatible, dando una interpretación geométrica en ambos casos. Estas interpretaciones geométricas volverán a usarse en la unidad 6 del libro, aunque en ningún momento se da un planteamiento teórico del estudio de las posiciones relativas de tres planos, sólo se plantean actividades pidiendo dicha posición relativa, y sin hacer referencia a la unidad 1.

El apartado 1.3 son los "sistemas graduados" (páginas 34 y 35), y se dedica a sistemas del tipo

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 7 \\ \quad 5y - z = 6 \\ \qquad 3z = 12 \end{cases}$$

donde podemos despejar una incógnita en la última ecuación e ir sustituyendo en las anteriores. El libro presenta diversos sistemas a los que llama graduados, e introduce cómo resolver un sistema compatible indeterminado, aunque sin llamarlo de esta forma.

Una vez introducido el uso del término “graduado” se presentan varios sistemas, se pregunta si son graduados y se pide resolverlos:

$$\left.\begin{array}{l} 3x \;\; = 7 \\ \text{x - 2y} = 5 \end{array}\right\},\; \left\{\begin{array}{l} 2x \qquad\quad = 6 \\ \text{x + y + 3z = 7,} \\ \text{5x} \quad\;\; \text{- z} = 4 \end{array}\right.\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\end{array}}\right\} \left\{\begin{array}{l} \qquad\;\; \text{z + t = 3} \\ \quad \text{y + 3z - 2t = 4} \\ \qquad\;\; \text{2z} \qquad = 2 \\ \text{x} \qquad \text{- z + 2t = 5} \end{array}\right.$$

Como vemos se trata de introducir un tipo de sistemas más fáciles de resolver, preparando a los alumnos para el método de Gauss. También se plantea, mediante tres ejemplos, como pasar de un sistema a otro graduado, sin usar en ningún momento notación matricial.

El primer encuentro con el método de Gauss tiene lugar en la sección 1.4 (página 36). Se comenta que es un procedimiento para transformar un sistema de ecuaciones lineales en otro graduado y se puede mejorar si, prescindiendo de las incógnitas, nos limitamos a utilizar los números (coeficientes y términos independientes). Se muestra la resolución de un sistema del apartado anterior, usando notación matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 11 \\ 4 & 3 & -4 & 3 \end{array}\right)$$

Estas “cajas numéricas” se llaman matrices, y se indica que se estudiarán en la siguiente unidad.

Este método se introduce como una regla de cálculo y a continuación aparecen ejercicios de aplicación de este algoritmo.

El trazado de la línea entre la tercera y la cuarta columna aparece como constitutivo de la matriz. De hecho esta línea aparece en todos los ejemplos y ejercicios del método de Gauss. Sin embargo, cuando en la unidad 4 se habla de la matriz ampliada de un sistema, en algunas ocasiones aparece esta línea y en otras no, sin presentar ninguna justificación de porqué se escribe.

Es de hacer notar que los autores presentan el método de Gauss, consiguiendo que en una de las ecuaciones (cualquiera) se pueda despejar una de las incógnitas (cualquiera), lo que nos parece que puede ser de mayor dificultad para el alumno, ya que ha de poner en juego a la vez la aplicación del método y la búsqueda de la estrategia para que el ejercicio se resuelva en menos pasos.

En la siguiente sección se introduce la discusión de sistemas de ecuaciones. Parte de un sistema dependiente de un parámetro:

$$\begin{cases} x+y+kz=1 \\ kx+(k-1)y+z=k \\ x+y+z=k+1 \end{cases}$$

"*Esto, más que un sistema de ecuaciones, es un conjunto de ellos*".

Este sistema se discute y se resuelve usando el método de Gauss, ejercitándose a continuación con ejemplos similares para que resuelvan los alumnos.

El siguiente apartado corresponde a ejercicios y problemas resueltos. Se presentan actividades similares, aunque con alguna excepción:

Se pide resolver el sistema:

$$\begin{cases} x+y-z+w=1 \\ 2x+y+2z-w=2 \end{cases}$$

Hasta este momento los alumnos habían visto que las soluciones podían depender de un parámetro. En este ejemplo, la solución depende de dos.

En otra actividad aparece un sistema donde el alumno no encuentra un 1 como pivote:

$$\begin{cases} 2x+3z=-1 \\ 3x-2y-2z=5 \\ 5x+2y+14z=-9 \end{cases}$$

El libro toma la primera ecuación como referencia:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -2 & 5 \\ 5 & 2 & 14 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(1^{\circ}) \\ 2\cdot(2^{\circ})-3\cdot(1^{\circ}) \\ 2\cdot(3^{\circ})-5\cdot(1^{\circ})}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -13 & 13 \\ 0 & 4 & 13 & -13 \end{array}\right)$$

Se presenta ahora una colección de 44 ejercicios y problemas propuestos, agrupándolos en apartados. En esta colección los 13 primeros son ejercicios de resolución de sistemas, algunos de ellos con varios apartados y en alguno se pide también la interpretación gráfica.

El ejercicio 8 presenta una situación novedosa para los alumnos:

Razona si estos sistemas tienen solución e interprétalos geométricamente:

a) x+2y-z = 3 b) –x+3y+6z = 3

2x+4y-2z = 1 $\frac{2}{3}$x-2y-4z = 2

Este tipo de sistemas se resuelven en el ejercicio 1 de los "ejercicios y problemas resueltos", pero el ejemplo planteado correspondía a un sistema compatible determinado. En este caso tenemos un sistema incompatible y uno compatible indeterminado. Resolviéndolos de la forma que indica el libro de texto llegaríamos a expresiones como 0 = -5 y 0 = 0, respectivamente, lo cual representaría para el alumno un conflicto, en vez de un simple ejercicio, ya que no se ha presentado, previamente, ningún caso parecido.

Por otro lado, el alumno todavía no ha estudiado la geometría del espacio, por lo que no conoce conceptos como vector normal del plano y no sería capaz de identificar las ecuaciones del apartado a) como dos planos paralelos. Esto viene comentado en la página 164. Cuando se expone, en la página 33, la interpretación geométrica de sistemas de ecuaciones con tres incógnitas aparecen cuatro y tres ecuaciones, y nunca un caso similar a este.

De la actividad 14 a la 21 tenemos ejercicios con un poco más de dificultad: discusión de sistemas con un parámetro e interpretaciones geométricas, pasando a problemas en los que el alumno ha de construir modelizaciones algebraicas mediante ecuaciones y, posteriormente, resolverlas. Quizás este tipo de tareas es el más característico del campo conceptual de los sistemas de ecuaciones lineales: la modelización algeraica de un problema.

Es de señalar que en ningún momento el libro da pautas para realizar bien esta modelización; lo que se intenta enseñar en el manual es a manipular, resolver o interpretar geométricamente sistemas de ecuaciones, pero no a construir modelos algebraicos. Este conocimiento se considera transparente para los alumnos de este nivel. Este tipo de problemas cubren desde la actividad 22 a la 32.

Las restantes actividades son cuestiones teóricas, que intentan ayudar a afianzar conceptos y algunos ejercicios de discusión de sistemas con parámetros, un poco más complejos que los anteriores.

El libro Colera y Oliveira (2009) reproduce exactamente igual la estructura de la primera unidad, incluso repitiendo los ejemplos y los ejercicios resueltos y propuestos.

La unidad 2 lleva por título *Álgebra de matrices*. Las matrices son introducidas como cajas o tablas numéricas en las que se resume una información estructurada. En libros LOE (Vizmanos, Hernández, Alcalde, 2009) la presentación es similar: *En matemáticas, tanto las listas como las tablas de elementos reciben el nombre de matrices.*

El primer problema que aparece como ejemplo es el siguiente:

Los seis consejeros (A,B,C,D,E,F) de una empresa deben elegir un presidente entre ellos mismos. Cada uno opina sobre los demás y sobre sí mismo, si es idóneo (1), si no es idóneo (-1) o si se abstiene (0). Estos son los resultados

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{E} & \mathrm{F} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & [-1] & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Por ejemplo el -1 señalado significa que D opina que E no es idóneo.

Ayudándote de una tabla, estudia detalladamente los resultados de la votación, analiza algunas de las características de los participantes y opina quién crees que debería ser presidente.

Como vemos, en esta tarea la palabra "matriz" no aparece. Tampoco en la actividad siguiente, que presenta vuelos entre dos aeropuertos A y B y entre los aeropuertos B y C pidiendo que se represente esta información en tablas y posteriormente se construya una tabla que dé los vuelos entre A y C. Este problema es una introducción al producto de matrices y su tratamiento por parte de los alumnos puede verse en Ferro (2004). Las mismas actividades se presentan como introducción a la segunda unidad didáctica del libro LOE, Colera y Oliveira, 2009.

La sección 2.1 (páginas 50 y 51) se dedica a presentar la nomenclatura que se usará a lo largo del tema: filas, columnas, dimensión, vector fila, vector columna, matriz cuadrada, matrices iguales, traspuesta, matriz simétrica y matriz triangular. Las matrices se definen como tablas numéricas rectangulares, y todos los conceptos se introducen con ejemplos, siendo dos de ellos tablas como las usadas en la actividad de los aeropuertos, pero identificándolas con matrices. La sección acaba presentando tres actividades a los alumnos similares a los ejemplos manejados.

Pasamos ahora a estudiar las operaciones con matrices. El libro menciona tres operaciones: suma de matrices, producto de un número por una matriz y producto de matrices, aunque antes de comentar el producto de matrices introduce el producto de una matriz fila por una matriz columna. El esquema que sigue el texto, para presentar las operaciones, es dar la definición teórica, para después ilustrar con ejemplos cómo se realizan. Se enfatiza el hecho de que para realizar la suma y el producto de matrices sus dimensiones han de cumplir unas condiciones determinadas. La no conmutatividad del producto queda en un segundo plano, ya que de las propiedades de las operaciones se encarga la sección siguiente, pero se presenta un ejemplo donde F = $(5 \quad 1 \quad 4 \quad 2)$ y

C = $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y se calcula FC, dando como resultado un número, y comentando que CF es una matriz 4×4, proponiendo al alumno que la calcule.

Además, se vuelve al problema inicial de los aeropuertos, calculando la matriz que da los vuelos da A a C como el producto de las que representan los vuelos de A a B y de B a C.

Como actividad para los alumnos se muestran cuatro matrices y se pide que efectúen todos los posibles productos entre ellas.

La matriz identidad se introduce a través de la siguiente actividad:

Intenta conseguir una matriz I_3 de dimensión 3×3 que, multiplicada por cualquier otra matriz A (3×3), la deje igual.

Es decir, $A \cdot I_3 = I_3 \cdot A = A$

La matriz I_3 se llama matriz unidad de orden 3. Cuando la tengas, sabrás obtener una matriz unidad de cualquier orden. (pag. 55)

Continuamos con la sección 2.3: *Propiedades de las operaciones con matrices*, con cuatro apartados:

- Propiedades de la suma de matrices: donde se menciona que el conjunto $M_{m,n}$ de las matrices de dimensión m×n es un grupo abeliano respecto de la suma (se define aparte grupo abeliano. Referencia similar aparece en Vizmanos, Hernández, Alcalde, 2009)
- Propiedades del producto de números por matrices.
- Propiedades del producto de matrices.
- Propiedades distributivas,

Las matrices cuadradas son estudiadas en la sección siguiente. Se menciona que las pueden multiplicarse entre sí cumpliéndose todas las propiedades estudiadas hasta el momento.

La matriz unidad es presentada formalmente como

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Aparece el concepto de diagonal principal, mencionando que todos los términos de la diagonal principal de la matriz unidad son 1. Además, se dice que la matriz identidad tiene la propiedad de que $AI_n = I_nA = A$ cualquiera que sea $A \in M_{n\times n}$.

También aparece el concepto de matriz inversa de otra. El libro plantea la pregunta de si toda matriz cuadrada tiene inversa, es decir, dada una matriz A, existe otra tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. La respuesta es negativa.

Cabe destacar que el libro calcula la inversa de una matriz 2×2, llamando a $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$ y planteando dos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. En ningún momento indica cómo calcular la inversa de una matriz de orden mayor que 2. Aunque el cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss no está dentro del currículo de 2º de Bachillerato en la especialidad de Ciencias de la Naturaleza y la Salud y Tecnología, no estaría de más presentar algún ejemplo, ya que de esta forma el alumno vería que un mismo algoritmo puede ser usado en diferentes situaciones. Por el contrario, Colera y Oliveira (2009) sí que presentan el cálculo de la inversa de una matriz por el método de Gauss.

El texto reduce el concepto de matriz inversa a su definición y a su cálculo. Se presentan dos matrices 3×3, de las que se afirma que son inversas, lo cual se comprueba procediendo a su multiplicación y obteniendo la matriz indentidad. Después, se muestra el cálculo de la inversa de una matriz 2×2, multiplicando una matriz dada por otra de la forma $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ e igualando el resultado a la matriz identidad. Según Vergnaud (1990), un concepto no puede ser reducido a su definición, y sólo a través de las situaciones y de los problemas que se pretenden resolver es como un concepto adquiere sentido. En esta unidad no aparece ninguna situación que requiera el uso de la matriz inversa, al menos explícitamente.

De forma implícita, en la página 71, dentro de las actividades para resolver nos encontramos la siguiente:

25- a) Comprueba que la inversa de A es A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{6}{5} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la matriz X que verifica XA = B, siendo A la matriz anterior y B = (1 -2 3).

El texto introduce esta actividad con dos apartados totalmente descohesionados se podría pedir a los alumnos que, una vez resuelto el apartado b), calcularan BA^{-1} y comparasen los resultados. De esta forma, el alumno vería la resolución de ecuaciones matriciales como una situación que requiere el uso de matrices inversas.

En este sentido tenemos también la actividad 40:

Resuelve la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}$$

El apartado de matrices cuadradas termina con un compendio de las propiedades de las operaciones en $M_{n\times n}$, separando por un lado las propiedades de las operaciones internas (suma y producto de matrices) y por otro las de la operación externa (producto de un número por una matriz). Como ejercicios resueltos correspondientes a la parte de matrices cuadradas se plantea una ecuación matricial, y un sistema de ecuaciones matriciales. Además se proponen al alumno nueve actividades que para ejercitar lo estudiado.

El apartado 2.5 lleva por título *Complementos teóricos para el estudio de matrices*. Señala que dichos complementos son necesarios para estudiar la idea de rango de una matriz. Comienza con los espacios vectoriales:

"La idea de vector como flecha da lugar a la de espacio vectorial: conjunto de todos los vectores entre los cuales se definen una operaciones que cumplen ciertas propiedades". (pag. 61, libro LOGSE; pag 62, libro LOE)

Esta definición se completa diciendo que el concepto de espacio vectorial es mucho más amplio que una colección de "flechas". En este momento, se da la definición formal de espacio vectorial, mencionando que el conjunto $M_{m\times n}$ de las matrices de dimensión m×n es un espacio vectorial.

Otros conceptos incluidos en este apartado son.

- n-uplas de números reales.
- combinación lineal de vectores.
- dependencia e independencia lineal.

Como ejemplo de n-uplas se dan (3,7) en R^2, $(7,-1,\sqrt{2})$ en R^3 y (4,-1,0,6) en R^4. Se menciona que todas las n-uplas de números reales forman un espacio vectorial que se designa R^n. Por tanto, los autores no distinguen, en este momento, el conjunto de vectores en el plano V^2 con el espacio vectorial R^2, y no se indica ninguna relación entre ellos.

Como ejercicios resueltos se presentan n-uplas y se pregunta si son linealmente independientes o dependientes; su resolución lleva a sistemas de ecuaciones lineales.

En el apartado “rango de una matriz” se da la definición y un teorema (el número de filas linealmente independientes coincide con el número de columnas linealmente independientes). La demostración que se expone a continuación no es general. Se parte de una matriz 5×4 de la que las tres primeras columnas son linealmente independedientes y la cuarta depende linealmente de ellas, y se demuestra que, necesariamente, tiene tres filas linealmente independientes. Se ilustra con un ejemplo del cálculo del rango, seguido de propuestas del cálculo del rango de cuatro matrices.

En cuanto a los ejercicios y problemas resueltos se trabajan los siguientes aspectos: operaciones con matrices, ecuación matricial, combinación lineal de matrices, matriz inversa, potencia n-ésima, ecuaciones con matrices (sistemas de ecuaciones matriciales), rango de una matriz, matrices conmutables, interpretación matricial de enunciados y matriz inversa del producto de dos matrices. En cada caso se presenta una actividad y se resuelve.

Se proponen ahora 59 ejercicios y problemas; de ellos los 18 primeros son ejercicios sobre las distintas operaciones puestas en juego en el tema. El ejercicio 19 requiere que el alumno utilice las propiedades de las operaciones: (idéntica actividad aparece en Colera y Oliveira [2009] con el número 21)

Comprueba que $A^2 = 2A\text{-}I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$*, e I la matriz unidad de orden 3. Utiliza esta igualdad para calcular A^4.*

Para calcular A^4 tendríamos que hacer

$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (2A-I)(2A-I) = (2A-I)^2$

El alumno resolvería la ecuación utilizando la fórmula

$(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$

lo cual, en este caso particular, es correcto por ser una de las matrices la matriz identidad. Sin embargo esto podría dar lugar a conflictos, ya que esta igualdad no puede aplicarse en otros casos, por no ser conmutativo el producto de matrices. El alumno podría afianzarse en el mismo error en las actividades 24 y 31 donde aparece $(A+I)^2$ y $(A-kI)^2$.

Luego el texto intenta que los estudiantes superen dicho error con la cuestión 41: (cuestión 37 del libro LOE)

Justifica por qué no es cierta la igualdad $(A+B)(A-B) = A^2-B^2$ *cuando A y B son dos matrices cualesquiera.*

Además, se introducen conceptos como matriz ortogonal, antisimétrica, mágica, y se plantean tres situaciones que requieren representar una información de forma matricial.

Los *determinantes* se estudian en la unidad 3.

Se explica el procedimiento para calcular determinantes de orden 2 y se pone un ejemplo, introduciendo la relación que hay entre el determinante de la matriz de los coeficientes de un sistema de ecuaciones y la existencia o no de solución. En la introducción también se comenta que en el cálculo de un determinante de orden 3 se hacen todos los productos posibles en los que intervienen un elemento de cada fila y uno de cada columna. Se pide al alumno que descubra cuántos hay y que los calcule, primero con una matriz dada, y luego para una matriz cualquiera. Además, se presentan los determinantes de orden 4 y de orden n. No se da una definición ni se justifica cómo hacer el cálculo pero se plantea la pregunta de cuántos productos de 4 y *n* factores hay en los que intervenga un elemento de cada fila y uno de cada columna.

Se estudia ahora el determinante de orden 2: su cálculo y su notación. Se introducen las propiedades, poniendo ejemplos de cada una de ellas. Además, se resuelven varios determinantes, alguno de ellos aplicando las propiedades.

En el estudio de los determinantes de orden 3 se usa la noción de permutación:

"Están todos los posibles productos con un factor de cada fila y uno de cada columna, pues los subíndices de las columnas son todas las permutaciones de 1,2,3. Hay 3! = 6".

La combinatoria no forma parte del currículo de matemáticas ni en la ESO ni en Bachillerato, por lo que no es probable que los alumnos sepan lo que son "las permutaciones de 1,2,3" ni la notación 3!. Sin embargo, el libro no explica qué significa *permutación*, lo entiende como estudiado.

Se define el determinante de cualquier orden y se menciona que las propiedades vistas para determinantes de orden 3 son válidas para cualquier determinante. Esto se ilustra con cálculos de determinantes de orden 4 y 5, tres de ellos resueltos por el libro y otros planteados al alumno. El primero que resuelve el libro es de orden 4 y tiene dos filas iguales. El texto hace alusión a una de las propiedades expuestas anteriormente para justificar que el resultado es cero. El siguiente ejemplo es un caso similar; en este caso el determinante tiene una columna de ceros. El último determinante es de orden 5 y también se obtiene 0 como resultado. Se justifica mostrando que la última columna es combinación lineal de las cuatro primeras.

La sección siguiente es “menor complementario y adjunto”. En ella se definen estos dos conceptos y se resuelve con un ejemplo. Además se proponen dos ejercicios a los alumnos. Estos objetos sirven para estudiar el desarrollo de un determinante por los elementos de una línea, que se demuestra teóricamente. También se hace la demostración de que si los elementos de una fila o columna se multiplican por los respectivos adjuntos de otra paralela, el resultado es 0.

Tras unas cuantas actividades para afianzar estos últimos resultados, se presenta un método para calcular determinantes de cualquier orden. El libro menciona que necesitamos “fabricar” ceros y que para eso utilizamos una idea muy similar a la usada en el método de Gauss. Se resuelven como ejemplo un determinante de orden 4 y otro de orden 5, planteando cuatro más al alumno.

El siguiente apartado trata del cálculo del rango de una matriz a partir de sus menores. Siguiendo el modelo de apartados anteriores, la exposición esta desprovista de toda formalidad. Se comenta que si un determinante es cero sus filas son linealmente dependientes. El rango de una matriz se define como el número de filas o columnas linealmente independientes. Por tanto, sin más justificación, el texto concluye que el rango de una matriz es el máximo orden de sus menores no nulos. Esto se ilustra con dos ejemplos. En el primero para una matriz 4×5, se calcula un menor de orden 3 que da distinto de cero, por lo que las tres filas de ese menor son linealmente independientes. Queda en el aire la pregunta: ¿podría darse el caso de que al completar las filas con los elementos que faltan los vectores obtenidos (de orden 5) fuesen linealmente dependientes, aunque los del menor (de orden 3) fuesen independientes? Aunque la contestación es obvia, tras un breve razonamiento, este razonamiento no se refleja en el libro, por lo que, para el alumno, este método se convierte en una técnica rutinaria sin relación con lo estudiado anteriormente.

El libro presenta ahora siete ejercicios resueltos donde se tocan diferentes aspectos del tema: propiedades de los determinantes, valor de un determinante, cálculo del rango de una matriz, resolución de una ecuación, estudio del rango de una matriz que depende de un parámetro y demostración de una igualdad (*Demuestra que si* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *se* *verifica $A^2 - (a+d)A + |A|I = 0$ donde I es la matriz unidad de orden 2 y 0 es la matriz nula de orden 2*). El libro LOE resuelve tres actividades más, a las que llama: “sin utilizar la regla de Sarrus”, “propiedades de los determinantes y rango de una matriz” y “encontrar una matriz”.

Las secciones de los ejercicios y problemas resueltos son similares a las de los temas anteriores. Destacamos la siguiente ecuación (ejercicio 4, apartado b):

$$\begin{vmatrix} senx & \cos x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Esta es una situación novedosa para el alumno. Las matrices se definieron en la página 50 como tablas numéricas y en la página 76 se llama determinante a un número que se obtiene operando de cierta manera con los elementos de una matriz. En ningún momento se dice que los términos de una matriz o de un determinante puedan ser otra cosa que números. Cuando aparecían incógnitas el alumno interpretaba que representaban números. Ahora, en la página 93, aparecen dos funciones trigonométricas, que pueden ser entendidas por el alumno como incógnitas cualesquiera o no, creando confusión. Lo mismo pasa con la actividad 22, donde se propone estudiar el rango de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En Colera y Oliveira (2009) ya no aparecen este tipo de actividades.

La mayoría de las actividades propuestas son ejercicios de aplicación y consolidación del aprendizaje, pero en algún caso se exige al alumno reflexionar acerca de las situaciones planteadas. Por ejemplo:

19- Las matrices A y B tienen 3 filas y 12 columnas pero, en el proceso de edición, algunas de éstas se borraron

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \dots\dots\dots \\ 3 & -1 & 0 & \dots\dots\dots \\ -7 & 5 & -2 & \dots\dots\dots \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \dots\dots\dots \\ 3 & 0 & 1 & \dots\dots\dots \\ 5 & 4 & 0 & \dots\dots\dots \end{pmatrix}$$

¿Puedes averiguar algo sobre los posibles valores de su rango?

Si llamamos C a la matriz que tiene como columnas las 24 que forman las dos matrices A y B, ¿cuál será el rango de C?

Por último la actividad 43 presenta una sucesión numérica y se pide que se demuestre por inducción que el término general viene dado por un determinante. Las sucesiones ya aparecían en el tema anterior en el cálculo de la potencia n-ésima, pero no se da ninguna introducción a ellas, sino que se suponen estudiadas en el curso anterior.

El último tema: *Resolución de sistemas mediante determinantes,* del bloque de Álgebra sigue haciendo uso de las matrices y determinantes.

El tema comienza con el sistema

$a_{11}x+a_{12}y = c_1$

$a_{21}x+a_{22}y = c_2$

el cual resuelve por reducción, llegando a

$$x = \frac{c_1 a_{22} - c_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, y = \frac{a_{11}c_2 - a_{21}c_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \quad (1)$$

Estas expresiones se obtienen como los determinantes de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, A_x = \begin{pmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{pmatrix}, A_y = \begin{pmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{pmatrix}$$

Se propone resolver cuatro sistemas de ecuaciones aplicando esta técnica, e intentar ampliarla a sistemas 3×3.

También se introduce el cálculo de la inversa de una matriz 2×2, multiplicando una matriz conocida por otra de la forma $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ e igualando a la matriz identidad. Se obtiene así un sistema de ecuaciones para x e y y otro para t y z que se resuelven con las expresiones (1). Se llega entonces a la conlusión de que $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

Esta unidad consta de siete apartados y en seis de ellos se amplía el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, empezado en el tema 1. La metodología es la misma que en los anteriores, aunque incrementando la formalidad. Se comienza presentando el teorema de Rouché como criterio para saber si un sistema es compatible, y demostrándolo. Por tanto, el estudio del rango de una matriz adquiere sentido al utilizarlo para ver si un sistema tiene o no solución. Se ponen algunos ejemplos y se plantean seis sistemas (dos de ellos de tres ecuaciones y dos incógnitas; otros dos con tres ecuaciones y cuatro incógnitas; y los últimos, con tres ecuaciones y tres incógnitas) para que el alumno los discuta.

La regla de Cramer se enuncia y se demuestra para un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Para ello se utiliza que la suma de los productos de los elementos de una columna de la matriz A por los adjuntos de otra vale 0. Se pide al alumno que enuncie y demuestre este método para el caso de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

El apartado siguiente es la *aplicación de la regla de Cramer a sistemas de cualquier tipo*, mencionando que, aunque en principio esta regla sólo es válida para sistemas cuadrados que cumplen que $|A| \neq 0$, también se le puede aplicar a cualquier sistema compatible. La estructura es similar a los apartados anteriores: se enuncia la regla, se resuelven dos ejercicios como ejemplo, y se proponen cuatro más.

De la misma manera tenemos el apartado de *sistema homogéneos*: definición, ejercicios resueltos y ejercicios propuestos con la intención de consolidar el aprendizaje. Se plantean sistemas compatibles determinados e indeterminados. No se menciona que un sistema homogéneo es compatible aunque se señala que *"un sistema homogéneo tiene, con seguridad, la solución x = 0, y = 0, z = 0,.... Por eso se le llama solución trivial"*. (pag. 106)

La siguiente sección trata la *discusión de sistemas mediante determinantes*, y está desprovista de explicaciones teóricas. En su lugar, se utilizan cuatro ejemplos de sistema dependientes de un parámetro, siendo todos distintos en cuanto al número de ecuaciones y de incógnitas. Se invita a discutir y resolver tres sistemas más.

El cálculo de la inversa de una matriz se introduce mediante la expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

y se justifica indicando que al multiplicar A por A^{-1} se obtiene la matriz unidad (en el texto se calcula, como ejemplo, dos de sus elementos). Se presenta además, una regla práctica para calcular la inversa de una matriz, en cuatro pasos. Esta regla no hace referencia a matrices con un orden concreto, y recuerda a la fórmula $A^{-1} = \frac{(AdjA)^T}{|A|}$.

Se plantea la matriz inversa de una matriz 2×2, y el libro recomienda ¡memorizarla! (Ortega, 2002, daba como una de las razones del fracaso de los alumnos en este tema el abuso del aprendizaje memorístico):

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Se pone un ejemplo de una matriz de orden 2 y de una de orden 3. Luego se da una demostración teórica del cálculo de la inversa. La técnica consiste en buscar una matriz $A^{-1} = (x_{ij})$ que cumpla la siguiente condición:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y a partir de aquí plantear tres sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas a los que se les aplicará la regla de Cramer.

En el apartado 4.7 se describe la forma matricial de un sistema de ecuaciones, sin darle excesiva formalidad. Se presenta una fórmula para determinar la solución del sistema en el caso de que A sea una matriz cuadrada regular: $X = A^{-1}C$. Por último, se plantean cuatro sistemas que el alumno ha de expresar en forma matricial y resolver.

La sección *ejercicios y problemas propuestos* apenas aporta nada nuevo, aunque hay que destacar el uso de la notación Adj(A), sin que se comente que es lo mismo que lo que antes llamaban (A_{ij}).

Los ejercicios propuestos son una colección de 55 actividades. Son parecidas a las resueltas a lo largo de la unidad: escribir sistemas en forma matricial, estudio de la compatibilidad de sistemas o resolución de sistemas aplicando la regla de Cramer, entre otras. Destacamos la actividad 43:

Si el rango de una matriz de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es dos y el de la matriz ampliada tres, ¿qué interpretaciones geométricas le podemos dar a ese sistema? Pon un ejemplo de un sistema de esas características y su interpretación geométrica.

El alumno carece, en este momento de estudio, de los conocimientos necesarios para identificar las posiciones relativas de tres planos en el espacio y supondría una trasgresión inoportuna del contrato didáctico.

Por último, en las actividades para profundizar se plantea la discusión de sistemas dependientes de dos parámetros (50,51 y 52).

Para terminar el bloque de Álgebra se presenta de la página 122 a la 126 un pequeño resumen de lo estudiado, junto con unos consejos útiles. Entre otras cosas se comenta que $(A+B)(A-B) \neq A^2-B^2$, por no ser conmutativo el producto de matrices. También recomienda cuándo usar el método de Gauss o la regla de Cramer:

- *Si los coeficientes son numéricos y no se indica ningún procedimiento concreto, el método de Gauss suele ser más ventajoso.*

- *Si se trata de resolver un sistema con uno o más parámetros, la regla de Cramer suele ser más ventajosa.*

En estas recomendaciones no se dice nada del tamaño del sistema.

En la página 126 se plantea una “prueba de autoevaluación” con ocho problemas, entre los cuales hay uno que exige el planteamiento de un sistema de ecuaciones lineales, modelizando algebraicamente una situación concreta.

4.4.1- Conclusiones del análisis del libro de texto de 2º de Bachillerato.

En el análisis del libro de texto hemos encontrado las siguientes cuestiones:

Al comienzo de cada tema se pretende que el alumno reflexione sobre ciertas cuestiones que más tarde se verán en esa unidad. De esta forma puede llegar por sí solo a resultados sobre los que no pensaría en caso de que simplemente se le presentasen. En esta parte no se dan definiciones formales, pero éstas aparecerán a lo largo de la unidad, con la formalidad requerida en este curso. Un ejemplo de esto es el producto de matrices: en la página 48 se plantea una actividad que hace que el alumno llegue a utilizar la multiplicación de dos matrices. Sin embargo, su definición formal no aparecerá hasta la página 54.

Quizás en la primera unidad el libro pretende introducir de manera “rápida” ciertos conceptos, utilizando términos que deberían ser familiares para alumnos de este nivel, pero que no estaría de más recordar.

Las matrices son introducidas en la unidad 1, pero en el siguiente tema se profundiza más en su enfoque. Se introduce la noción de matriz como tabla numérica rectangular y las operaciones que se pueden realizar con matrices. Es de señalar que a lo largo de todo el bloque de Álgebra todos los conceptos y operaciones introducidas se ilustran con gran cantidad de ejemplos y ejercicios resueltos. Además, en la unidad 1 y 2, aparece algún ejemplo que intenta poner en juego situaciones reales (los llamados “problemas de enunciado” o en la unidad 2 el problema de los consejeros o del aeropuerto).

Sin embargo, en las unidades 3 y 4 no aparecen este tipo de ejemplos, pero en cambio las exposiciones teóricas tienen más formalidad, apareciendo más demostraciones de los resultados (propiedades de los determinantes, teorema de Rouché, regla de Cramer, cálculo de la inversa).

En general, destacamos que este análisis nos muestra que el tratamiento del Álgebra Lineal en 2º de Bachillerato se caracteriza por dotar a los objetos tratados de una formalidad mayor que otros temas de cursos anteriores, pero sin pecar en un excesivo rigor. Miranda (2004) afirma que en el Álgebra Lineal, la mayor parte de conceptos se presentan como definiciones formales de objetos cuya existencia no tiene (en la mayoría de los casos) conexión con conocimientos previos ni argumentos geométricos o físicos que motiven la definición presentada. Los problemas asociados se resuelven usando la definición dada junto con argumentos derivados de la lógica. Esto hace que muchos estudiantes sientan que la materia es demasiado abstracta y que los contenidos son objetos que no tienen relación con algo que se pueda aplicar en la realidad. Por ello consideramos que la decisión del libro de texto de rebajar el grado de formalidad ha sido acertada.

El tratamiento del Álgebra Lineal como herramienta para afrontar la geometría es bastante bueno, ya que se presentan muchas actividades para que el alumno pueda practicar los algoritmos y adquirir destreza en su manejo. De esta manera, a la hora de abordar más adelante un problema de geometría, el estudiante podrá concentrarse exclusivamente en el planteamiento geométrico, mientras que el cálculo de determinantes o del rango de una matriz será puramente mecánico.

La relación con la geometría se observa nada más comenzar la lectura del texto, ya que se plantea al alumno que represente gráficamente varias ecuaciones lineales con dos incógnitas. Esto llevará al estudiante de forma natural al concepto de ecuaciones equivalentes y al de sistema incompatible, al encontrar ecuaciones cuya representación gráfica es la misma, en un caso, o rectas paralelas, en otro caso. Esto dotará de un sentido a aquello que se va a estudiar en estas unidades.

Se hecha en falta más resolución de problemas, pese que ese es uno de los objetivos de esta etapa. De hecho, Ortega (2002), en su investigación con alumnos del primer curso universitario, encuentra que uno de los problemas presentes en el alumnado es que, aunque la actitud fuese positiva cara a la resolución de problemas, faltaba método y estrategias de resolución, sobre todo se carecía del método de inducción, que debería de ser manejado con soltura en un curso previo a la universidad.

Por último, señalar que el tema de espacios vectoriales no aparece como tal, pero se da una definición en el apartado 2.5: Complemento teóricos para el estudio de matrices. En ella se dan las propiedades que definen esta estructura, que son las estudiadas en el apartado 2.3: propiedades de las operaciones con matrices. Además, en el estudio del rango de una matriz se identifican sus filas y sus columnas con vectores. En este sentido consideramos que aunque no se estudia el tema de espacios vectoriales, encontramos de forma implícita abundantes elementos de dicho tema, confirmándose de esta manera nuestra hipótesis.

4.5. *Clasificación de las Tareas.*

Según Vergnaud (1990) las situaciones que se pretenden resolver en una clase de matemáticas pueden ser de dos tipos:

1º) Clases de situaciones para las cuales el sujeto dispone en su repertorio de competencias necesarias para hacer frente a la situación.

2º) Clases de situaciones para las cuales el sujeto no dispone de todas las competencias necesarias, lo que le obliga a un tiempo de reflexión, y no queda garantizado el éxito.

Entendemos que las primeras situaciones son aquellas que el alumno puede resolver con lo que ha estudiado en el tema, mientras que las segundas requieren conocimientos no estudiados o recordados en la unidad objeto de estudio, y por tanto el alumno ha de relacionar distintos elementos, algunos de los cuales es probable que no conozca o que no recuerde. Llamaremos a estas clases de situaciones, situaciones de tipo I y de tipo II, y analizaremos las actividades de los libros de texto, clasificándolas en ambos grupos:

Matemáticas I (COU):

Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss: 46 actividades.

Situaciones de tipo I: 35

Situaciones de tipo II: 11

Son necesarios conocimientos de aritmética (problemas donde se invierte el orden de las cifras de un número), de polinomios (teorema del resto), de proporciones (mezclas de soluciones) y de figuras planas y poliédricas.

Espacios vectoriales: 42 actividades.

Situaciones de tipo I: 40

Situaciones de tipo II: 2

Estas dos situaciones se refieren al núcleo y a la imagen de una aplicación lineal, conceptos que se definen por primera vez en el enunciado de esta actividad.

Matrices: 52 actividades.

Situaciones de tipo I: 47

Situaciones de tipo II: 5

Para resolver estas actividades se requiere manejar razones trigonométricas. Incluimos también aquí las tareas sobre cálculo de la potencia n-ésima, ya que probablemente el alumno no maneje el método de inducción

Determinantes: 64 actividades.

Situaciones de tipo I: 62

Situaciones de tipo II: 2

Estas actividades hacen uso de las razones trigonométricas y de las fórmulas estudiadas en el curso anterior (sen(a-b)) que muy probablemente el alumno no recordará.

Sistemas de ecuaciones lineales: 42 actividades

Situaciones de tipo I: 41

Situaciones de tipo II: 1 (razones trigonométricas)

Matemáticas II (LOGSE):

Sistemas de ecuaciones. Método de Gauss: 60 actividades

Situaciones de tipo I: 53

Situaciones de tipo II: 7

En estas situaciones han de utilizarse conceptos como posiciones relativas de planos, porcentajes o ciertos conocimientos de aritmética que, aunque el alumno ya conoce, no suelen ser usados en el aula, por lo que es difícil que los alumnos puedan plantear el problema.

Álgebra de matrices: 84 actividades

Situaciones de tipo I: 83

Situaciones de tipo II: 1 (pone en juego conocimientos de sucesiones)

Determinantes: 61 actividades

Situaciones de tipo I: 58

Situaciones de tipo II: 3 (hace falta manejo de razones trigonométricas y recordar algún concepto de sucesiones)

Resolución de sistemas mediante determinantes: 73 actividades

Situaciones de tipo I: 71

Situaciones de tipo II: 2 (es necesario el uso de razones trigonométricas y conocimientos sobre posiciones relativas de planos en el espacio)

Vemos que ambos libros tienen un porcentaje similar de situaciones de ambos tipos; quizás es un poco diferente en la primera unidad: 23'9% de situaciones de tipo II en el libro de COU, frente a 11'7% en el libro de Bachillerato.

Además de esta clasificación propuesta por Vergnaud, tenemos la clasificación presentada por Pérez (1994), expuesta en el capítulo 1.2. En forma resumida esta clasificación era la siguiente:

a) Ejercicios:

- Tipo I: repetición de una técnica previamente expuesta por el profesor.
- Tipo II: procedimientos en los que se insertan esas técnicas.

b) Problemas: no hay un algoritmo conocido que lleve directamente a la solución y, si lo hay, la tarea es completamente novedosa para el alumno.

Los ejercicios de tipo II y los problemas darán la oportunidad de analizar las prácticas personales significativas dentro de la institución clase, ya que se podría dar el caso de que se pueda afrontar la actividad de diferentes maneras. Por el contrario, los ejercicios de tipo I están preparados, en general, para que el alumno pueda utilizar los contenidos que figuran en el manual sin apenas ningún tipo de transformación.

Clasificaremos ahora las actividades presentadas por los dos libros de texto desde esta perspectiva.

Matemáticas I (COU):

<u>Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss</u>: 46 actividades.

Ejercicios de tipo I: 11

Ejercicios de tipo II: 23

Problemas: 12

En los ejercicios de tipo I también incluiremos aquellas cuestiones que supongan que el alumno consolide los contenidos teóricos:

4- ¿Cómo se clasifican los sistemas? Pon un ejemplo de cada uno de los tipos, utilizando sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Los ejercicios de tipo II son cuestiones donde el alumno ha de aplicar lo aprendido y problemas que requieren una modelización algebraica. Por ejemplo:

1- El sistema $\begin{cases} 2x+3y=13 \\ -x+y=1 \end{cases}$ *tiene dos soluciones: x = 2 e y = 3. ¿Es correcta esta forma de referirse a la solución del sistema? Razona la respuesta.*

En cuanto a los problemas hay que mencionar que en el conjunto de las 12 actividades hay algunas similares. Aunque, por separado, supondrán un problema para el alumno, al estar juntas, sólo supondrá un verdadero problema la primera, convirtiéndose el resto en una repetición de esta primera actividad, y por tanto en ejercicios de tipo II (por ejemplo, los problemas de mezclas).

Espacios vectoriales: 42 actividades.

Ejercicios de tipo I: 34

Ejercicios de tipo II: 0

Problemas: 8

En este tema no encontramos ejercicios de tipo II, es decir, que requieran una modelización algebraica, ya que las características de la unidad hacen que las actividades ya estén escritas en lenguaje algebraico. Del mismo modo, los problemas propuestos son problemas internos a la matemática, no modelizan ninguna situación real.

Matrices: 52 actividades

Ejercicios de tipo I: 16

Ejercicios de tipo II: 13

Problemas: 23

Determinantes: 64 actividades

Ejercicios de tipo I: 46

Ejercicios de tipo II: 16

Problemas: 2

Los dos problemas corresponden al cálculo de dos determinantes. No se percibe a priori la estrategia a seguir.

Sistemas de ecuaciones lineales: 42 actividades

Ejercicios de tipo I: 39

Ejercicios de tipo II: 3

Problemas: 0

Matemáticas II (LOGSE):

Sistemas de ecuaciones. Método de Gauss: 60 actividades

Ejercicios de tipo I: 36

Ejercicios de tipo II: 16

Problemas: 8

Álgebra de matrices: 84 actividades

Ejercicios de tipo I: 44

Ejercicios de tipo II: 24

Problemas: 16

Quizás aquí vemos una gran diferencia entre el número de problemas y el de situaciones de tipo II que señalábamos en la clasificación anterior. La mayoría de estos problemas no necesitan más conocimientos que los introducidos en la unidad, pero muchos son novedosos para el alumno y en otros hay que razonar sobre los resultados obtenidos, sin seguir un algoritmo concreto.

Determinantes: 61 actividades

Ejercicios de tipo I: 44

Ejercicios de tipo II: 8

Problemas: 9

En este caso los problemas no son situaciones reales, sino internas matemáticas. Hay alguna actividad que por su dificultad y su carácter novedoso podría ser clasificada como problema, pero se la ha considerado ejercicio de tipo II porque el libro proporciona indicaciones para resolverlas, y sólo con seguirlas, al alumno le resultará viable llegar a la solución, sin tener que tomar ninguna decisión sobre la estrategia a seguir.

Resolución de sistemas mediante determinantes: 73 actividades

Ejercicios de tipo I: 59

Ejercicios de tipo II: 14

Problemas: 0

Al igual que ocurría en el libro de COU, en este tema el libro se centra únicamente en consolidar las técnicas enseñadas con ejercicios donde sólo se repiten dichas técnicas y con otros donde el alumno ha de razonar cómo emplear estos algoritmos pero sin necesidad de recurrir a diferentes estrategias.

Resumiremos los resultados obtenidos en las siguientes tablas:

Tabla 4.5.1: Porcentajes de actividades en el manual de Matemáticas I (COU)

	Unidad 1	Unidad 2	Unidad 3	Unidad 4	Unidad 5
ejercicios tipo I	23’9%	81%	30’8%	71’9%	92’9%
ejercicios tipo II	50%	0%	25%	25%	7’1%
problemas	26’1%	19%	44’2%	3’1%	0%

Tabla 4.5.2: Porcentajes de actividades en el manual de Matemáticas II (LOGSE)

	Unidad 1	Unidad 2	Unidad 3	Unidad 4
ejercicios tipo I	60%	52’4%	72’1%	80’8%
ejercicios tipo II	26’7%	28’6%	13’1%	19’2%
problemas	13’3%	19%	14’8%	0%

Exceptuando la unidad de espacios vectoriales (organización matemática que no figura en el manual Matemáticas II- LOGSE), hay que observar un aumento considerable de los ejercicios de tipo I en el segundo libro, que por tanto estará más centrado en la *consolidación de técnicas rutinarias*. Observamos también que, excepto en la unidad de determinantes, hay un descenso en el porcentaje de problemas. De todas formas, hay que señalar que la mayoría de estos problemas son situaciones matemáticas, no reales, por lo que los alumnos no verán realmente las aplicaciones de estos objetos.

Como conclusión señalamos que el libro Matemáticas II-LOGSE presenta un significado de referencia en la que el alumnado ha de poner menos de su parte para resolver tareas matemáticas, aplicando distintas estrategias que en el libro de COU. Cuantitativamente presenta muchas más actividades, muchas de ellas preparatorias para la Selectividad, pero se observa un descenso en la dificultad de las tareas.

4.6. *Comparación entre ambos libros.*

Para realizar nuestra comparación entre los dos libros de texto analizados utilizaremos las categorías presentadas por González y Sierra (2004). Estos autores utilizan las siguientes clases:

- Sintáctico: Cada símbolo se puede considerar susceptible de ser insertado en secuencias junto con otros mediante unas reglas que garantizan la coherencia interna y la validez.
- Semántico: Los signos se consideran en relación con su significado matemático y sus relaciones con conceptos de otras ciencias.
- Pragmático-didáctico: Una representación semiótica puede ser más adecuada que otra en función del juego de lenguaje en el que participa.
- Sociocultural: Muchos de los símbolos matemáticos son intemporales, pero, actualmete, las necesidades tecnológicas han impuesto algunas variaciones en estos signos.

Los autores elaboran un instrumento para el análisis, definiéndose veinte dimensiones agrupadas en las cuatro categorías anteriores. En cada dimensión consideran tres modalidades, lo que permite clasificar los manuales según la modalidad dominante:

- Expositivo: Son textos en los que se considera el conocimiento matemático como una acumulación de resultados, reglas y procedimientos aislados, relativamente inconexos y desconectados de la realidad, pero que poseen una estructura matemática, típicamente deductiva, en la que, partiendo de las definiciones de los conceptos, se deducen los teoremas y se exponen los ejemplos.
- Tecnológico: Se conciben las matemáticas como una organización lógica de enunciados, reglas y procedimientos que se emplean como técnicas o destrezas para reflexionar sobre los conceptos y aplicarlos a diversas situaciones.
- Comprensivo: Se conciben las matemáticas como un instrumento para interpretar la realidad, entendida ésta en un sentido amplio.

En la tabla siguiente se presentan de manera sintética las categorías y las dimensiones utilizadas.

Tabla 4.6.1: Categorías y dimensiones empleadas en el análisis de los manuales.

Categorías		Dimensiones	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Sintáctica	1	Estructura del problema	Clásica	Aplicación	Explicación
	2	Descripciones teóricas	Formales	Formales-intuitivas	Intuitivas
	3	Símbolo utilizados en las tablas	Sin tablas	Con símbolos matemáticos	Con iconos
	4	Símbolos utilizados en las gráficas	Literal	Utilización de números	Elementos explicativos
	5	Tipos de expresiones simbólicas	Familias	Específicas	Variadas
Semántica	6	Fenomenología	Matemáticas	Realistas	Reales
	7	Tipos de descripciones	De conceptos	De reglas	De relaciones
	8	Tipos de tablas	Sin tablas	Descripción local	Cuadros de variación
	9	Tipos de gráficas	Ideogramas	Ábacos	Mensajes topológicos
	10	Significado de las expresiones simbólicas	Objeto	Regla	Proceso
Pragmático-didáctica	11	Función de los ejercicios	Rutinarios	Aplicación	Deducción
	12	Papel de las definiciones	Estructurales-teóricas	Aplicación a problemas	Interpretación
	13	Actividades relacionadas con las tablas	Sin tablas	Construcción	Interpretación / Construcción
	14	Actividades gráficas	Visualización	Construcción	Interpretación / Construcción
	15	Papel de las expresiones simbólicas	Ejemplificación	Escolar	Social
Sociocultural	16	Influencia social y adaptación al currículo	No hay	Contexto intemporal	Contexto actual
	17	Influencias didácticas	Clásica	Adaptada al currículo	Novedosa
	18	Aplicación de las tablas	Sin tablas	Elemento auxiliar	Categoría de objeto
	19	Presentación de las gráficas (estática / dinámica)	Descontextualizada	Impresa	Nuevas tecnologías
	20	Complejidad de las expresiones simbólicas	Clásicas	Sencillas	Complejas

Se ha completado la tabla anterior para cada libro, indicando, respecto a cada dimensión mediante un asterisco en la casilla correspondiente, la orientación que se ha obtenido del análisis del manual. Para una misma dimensión puede haber varios asteriscos, en el caso de que haya unidades de información que correspondan a varios perfiles, y la diferencia en la cantidad de las unidades correspondiente a cada uno de ellos sea pequeña. El libro quedará clasificado en la columna en la que aparezca mayor número de asteriscos.

El perfil del libro de COU es el siguiente: (tabla 4.6.2)

En general estamos ante un libro con un planteamiento clásico en cuanto a la estructura de los problemas presentados y el desarrollo de los conceptos teóricos, aunque estas descripciones teóricas intentan mezclar lo puramente formal con lo intuitivo. El manual no presenta ninguna tabla y pocas gráficas, intentando en éstas utilizar números en vez de elementos literales y en ningún momento se pretende una construcción por parte del alumno; únicamente una visualización. En cuanto a sus expresiones simbólicas, procura mezclar lo general con lo específico, dándoles un carácter escolar. Por ejemplo: se utiliza V para designar al espacio vectorial y presentar sus propiedades, pero, a la vez, se da la misma explicación con R, R^2 y R^n.

La semántica del libro se presenta en un contexto expositivo; la importancia reside en los objetos matemáticos y en la descripción de los conceptos, sin intentar un enfoque realista. Los ejercicios son rutinarios y las definiciones tienen su importancia por su estructura teórica, pero, también como un instrumento de aplicación a los problemas.

El libro presenta un contexto intemporal, con influencias didácticas adaptadas al currículo y con expresiones simbólicas clásicas y sencillas. Estamos ante un libro **expositivo**.

Tabla 4.6.2: Análisis del libro de COU.

Categorías		Dimensiones	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Sintáctica	1	Estructura del problema	*		
	2	Descripciones teóricas		*	
	3	Símbolo utilizados en las tablas	*		
	4	Símbolos utilizados en las gráficas		*	
	5	Tipos de expresiones simbólicas	*	*	
Semántica	6	Fenomenología	*		
	7	Tipos de descripciones	*		
	8	Tipos de tablas	*		
	9	Tipos de gráficas	*		
	10	Significado de las expresiones simbólicas	*		
Pragmático-didáctica	11	Función de los ejercicios	*		
	12	Papel de las definiciones	*	*	
	13	Actividades relacionadas con las tablas	*		
	14	Actividades gráficas	*		
	15	Papel de las expresiones simbólicas		*	
Sociocultural	16	Influencia social y adaptación al currículo		*	
	17	Influencias didácticas		*	
	18	Aplicación de las tablas	*		
	19	Presentación de las gráficas (estática / dinámica)		*	
	20	Complejidad de las expresiones simbólicas	*	*	

En cuanto al perfil del libro *Matemáticas II*, tenemos:

Tabla 4.6.3: Análisis del libro de 2º de Bachillerato.

Categorías		Dimensiones	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Sintáctica	1	Estructura del problema		*	
	2	Descripciones teóricas			*
	3	Símbolo utilizados en las tablas			*
	4	Símbolos utilizados en las gráficas		*	
	5	Tipos de expresiones simbólicas			*
Semántica	6	Fenomenología	*	*	*
	7	Tipos de descripciones		*	
	8	Tipos de tablas		*	
	9	Tipos de gráficas	*		
	10	Significado de las expre-siones simbólicas		*	
Pragmático-didáctica	11	Función de los ejercicios	*		
	12	Papel de las definiciones		*	
	13	Actividades relacionadas con las tablas			*
	14	Actividades gráficas			*
	15	Papel de las expresiones simbólicas		*	*
Sociocultural	16	Influencia social y adap-tación al currículo		*	*
	17	Influencias didácticas		*	
	18	Aplicación de las tablas		*	
	19	Presentación de las gráficas (estática / diná-mica)		*	
	20	Complejidad de las ex-presiones simbólicas		*	

Este libro sigue manteniendo una estructura clásica en la presentación de los contenidos, pero ya no es fundamentalmente teórico. La matemática ya no se expone por sí misma y se intentan buscar relaciones entre los objetos matemáticos, sobre todo los correspondientes a sistemas de ecuaciones lineales, matrices y posiciones relativas de rectas y planos en el espacio. Se intenta que los términos usados no tengan una formalidad excesiva, sino un carácter más comprensivo e intuitivo.

Se hace hincapié en las técnicas que debe aprender el alumno de forma práctica, como, por ejemplo, el método de Gauss. Además, para ilustrarlas aparecen numerosos ejercicios y actividades, aunque no podríamos clasificarlas como problemas, intentando con alguna de ellas (escasas) acercarse a la realidad del alumno y a la sociedad del momento.

El perfil de este libro tiene un carácter tecnológico, aunque en cierto aspectos, como el sintáctico o el pragmático-didáctico presenta un perfil comprensivo. Esto, junto a los demás aspectos analizados en este capítulo hace que sea posible establecer una comparación entre ambos textos y, por tanto, por ser representativos de los significados de referencia en estos cursos, intentar extrapolarla a una comparación entre los significados pretendidos e implementados en ambos planes de estudio.

Por otro lado, también encontramos rasgos comunes en ambos libros. Hay una programabilidad de los saberes, es decir, existe un inicio y una secuenciación. También, hay una textualización del saber (Ruiz, 1993), es decir, una organización discursiva del conocimiento objetivo, que se traduce en:

- Una despersonalización del saber: hay una separación de las personas a las que estuvo ligado en su génesis. En ninguno de los textos se llega a los resultados sobre matrices y determinantes utilizando el mismo camino que utilizaron los distintos investigadores.
- Una delimitación en saberes parciales: los distintos resultados se van presentando y luego se acoplan según las necesidades estructurales del sistema didáctico.
- Una *atomización* (Gascón, 1998) de los saberes parciales: cada objeto estudiado puede ser autónoma en el tratamiento dado por el sistema didáctico. De hecho, tanto los programas como los libros de texto, presentan por separado las unidades de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.
- Una explicitación de algunas nociones matemáticas: las matrices son introducidas como objeto de estudio anunque antes se habían utilizado como instrumento para resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss.
- Un uso implícito de nociones paramatemáticas y protomatemáticas (Gascón, 1998) hay nociones indispensables para la actividad matemática que no se introducen como objeto de estudio, bien por haberlas trbajado en cursos anteriores (concepto de ecuación,

incógnita, variable,…) o por considerarla de especial dificultad en este curso (función lineal).

Dickinson y Eade (2004) abogaban por usar métodos donde se primara más lo visual frente a lo algebraico. Según estos autores, la mayoría de los estudiantes usan reglas aprendidas que manipulan a ciegas sin entender su significado real. En este sentido consideramos que el libro LOGSE se ajusta más a lo planteado por estos autores. Mientras que el texto de COU no utilizaba tablas en sus explicaciones, hay un esfuerzo por parte del libro LOGSE en usar iconos en sus gráficas. Además, este manual propone más actividades de interpretación, mientras que el libro de COU presentaba actividades más estructurales-teóricas, y, por tanto, menos visuales para el alumnado de secundaria.

En ambos manuales nos encontramos con que la función de los ejercicios es rutinaria, por lo que no son libros pensados para que el alumno desarrolle su capacidad de resolución de problemas. Hay autores (Mercado, 2003) que denuncian esta situación. Nuestra tarea como profesores debe ir encaminada a favorecer el desarrollo de nuestros alumnos como resolutotes independientes de problemas, no como simples aplicadores de unas reglas algorítmicas. Es necesario en el aula más resolución de problemas y menos tareas de tipo mecánico.

Tampoco se plantea ninguno de los manuales el uso de las nuevas tecnologías, pese a propuestas de autores (Rodríguez, 1999) por la utilización de calculadoras gráficas, por ejemplo. Las propuestas metodológicas son clásicas en ambos libros.

4.7. *Estudio de los exámenes de selectividad.*

Nos proponemos en este apartado supervisar algunos exámenes de Selectividad, aunque sólo nos centraremos en la parte correspondiente al Álgebra Lineal, por ser este tema el objeto de nuestro estudio. Recordemos antes de comenzar que la CIUG (Comisión Interuniversitaria de Galicia), en la valoración de las Pruebas en el curso 2005-2006, señala que el nivel de conocimientos de los alumnos en la prueba de Álgebra fue bueno y que parece ser la parte de la materia que más se trabaja aunque los cálculos y procedimientos que utilizan los alumnos parecen ser hechos de forma rutinaria.

Para realizar este estudio partiremos de la clasificación de las actividades propuestas en las Pruebas de Acceso a la Universidad, en ejercicios y problemas. Al ser actividades que no están propuestas en un contexto de enseñanza-aprendizaje dirigido por un profesor concreto no tiene sentido clasificar los ejercicios en dos tipos tal como hacíamos en el apartado 4.3. Así, un problema lo consideraremos como una situación en la cual un individuo (o grupo de ellos) es invitado a resolver una tarea para la que no conoce una técnica de aplicación inmediata que determine el método de solución. Los ejercicios, por el contrario, son actividades de puesta en funcionamiento de técnicas previamente trabajadas; se considerarían como medio de aplicación y refuerzo de contenidos previamente aprendidos.

En total se han analizado 96 actividades propuestas en Selectividad. Corresponden a exámenes de junio y setiembre realizados en toda España entre los años 2001 y 2006 tanto en la asignatura de Matemáticas II como en la de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. Haremos una clasificación estadística de estas tareas desde diferentes puntos de vista y posteriormente interpretaremos estos resultados numéricos. Recordemos que son las situaciones las que dan sentido a los objetos matemáticos, por lo que también queremos analizar si las situaciones propuestas en estas Pruebas sirven para evaluar el grado de comprensión de los conceptos.

Atendiendo a las dos clases de situaciones que propone Vergnaud (1990) y que nosotros hemos llamado situaciones de tipo I y tipo II, hemos de señalar que entre las actividades analizadas, relacionadas con el Álgebra Lineal, hemos encontrados 95 situaciones de tipo I frente a 1 de tipo II, resultado lógico si tenemos en cuenta la filosofía de las Pruebas de Acceso a la Universidad, que es comprobar si el alumno ha asimilado razonablemente los contenidos de 2º de Bachillerato y tiene madurez suficiente, académicamente hablando, para afrontar estudios posteriores. Por lo tanto no se plantean actividades para las cuales es dudoso que el alumno disponga de las competencias suficientes para afrontarlas. Todas las actividades propuestas en esta prueba son de tal naturaleza que cualquier alumno las puede resolver con los conocimientos adquiridos a lo largo del curso, sin necesidad de recurrir a nada específico estudiado anteriormente, es decir, no entran en juego objetos matemáticos que posiblemente el alumno lleve tiempo sin manejar (por ejemplo, números complejos, límites de sucesiones o funciones, etc).

La única actividad que hemos calificado de situación de tipo II es la siguiente:

Demuestre que toda matriz cuadrada 3-dimensional se puede escribir como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica. (Galicia, Junio 2004, Matemáticas II).

Se reomienda hacer demostraciones en la clase de 2º de Bachillerato pero no son objetivo del examen de Selectividad. Esto quiere decir que esta actividad no esta planteada pensando que el alumno ya ha visto esta propiedad en clase y que deba memorizarla, sino que es una tarea nueva para él. Consideramos que es una situación de tipo II porque el alumno, a priori, no dispone de las técnicas necesarias para abordarla. Es una de las pocas actividades que piden demostrar un resultado, lo que confirma lo dicho por De Villiers (1993), cuando hablaba del desprestigio que tiene la demostración en las clases de secundaria. Algo tan propio de las matemáticas como es la demostración de un resultado sólo aparece en una actividad de las 96 revisadas, y en pocas de ellas aparece la palabra *justificar*.

Atendiendo a la clasificación propuesta por Pérez (1994), en ejercicios de tipo I, ejercicios de tipo II y problemas, nos encontramos con los siguientes resultados:

Tabla 4.7.1: Clasificación de actividades propuestas en las Pruebas de Acceso a la Universidad.

	Ejercicios de tipo I	Ejercicios de tipo II	Problemas
Frecuencia	69	26	1
Porcentaje	71’9%	27’1%	1%

En este caso la actividad considerada “problema” coincide con la llamada anteriormente “situación de tipo II”. Pondremos un ejemplo de las tareas consideradas ejercicios de tipo I y II.

Resolver matricialmente la ecuación $A^T X\text{-}B = 0$ siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Consideramos que esta actividad es un ejercicio de tipo I porque aparece en muchos de los libros de texto estudiados y, por tanto, con toda probabilidad los estudiantes han realizado en algún momento del curso una actividad similar a esta.

Como ejemplo de ejercicio de tipo II encontramos:

Halle tres números sabiendo que el primero menos el segundo es igual a $\frac{1}{5}$ *del tercero, si al doble del primero le restamos 6 nos queda la suma del segundo y el tercero y, además, el triple del segundo menos el doble del tercero es igual al primero menos 8.*

En esta cuestión el alumno ha de aplicar las técnicas aprendidas, pero previamente ha de escribir el modelo algebraico del problema. Esto es lo que lo caracteriza como ejercicio de tipo II, ya que ha de aplicar los procedimientos estudiados a una situación diferente. Creemos que no llega, sin embargo, a la categoría de problema ya que el alumno conoce métodos para realizar la modelización algebraica y las técnicas que ha de aplicar, seguidamente, para resolver el problema. Hemos encontrado tres problemas con esta estructura, es decir, donde se invita a calcular unos números bajo unas condiciones dadas. Con ellos el alumno puede ver alguna utilidad que tiene el cálculo matricial, pero sin salir del ámbito de las matemáticas.

Del mismo modo que más adelante (capítulo 6.4.1) analizaremos los exámenes realizados por los alumnos, vamos a clasificar las actividades propuestas en estas Pruebas de la siguiente forma:

- Ejercicios que utilicen la notación matricial. (NM): Incluiremos en este apartado aquellas actividades donde el alumno no tenga que hacer ningún cálculo rutinario, planteando una situación teórica no estudiada en clase.
- Ejercicios de aplicación del cálculo matricial. (AC): Nos referimos en este apartado a actividades reales donde sea necesario hacer operaciones con matrices para resolverlas, exceptuando todas aquellas tareas que para ser resueltas necesitan modelización algebraica mediante un sistema de ecuaciones lineales.
- Ejercicios de cálculo matricial. (CM): Todas aquellas actividades que se pueden resolver aplicando una rutina.
- Propiedades de los determinantes. (PD): Actividades referidas a los determinantes y sus propiedades.
- Modelización algebraica de problemas de enunciado. (MA): En su mayoría serán actividades que requieran la modelización algebraica previa, mediante un sistema de ecuaciones lineales
- Preguntas teóricas. (PT): Nos referimos a aquellas cuestiones que requieran la interpretación, aplicación del enunciado de conceptos teóricos estudiados en clase o de la justificación teórica de alguno de los algoritmos usados.

En referencia a esto último hay que mencionar que sólo se pide una descripción del algoritmo, en ningún caso una justificación de por qué se dan unos determinados pasos. Sería lo que, realmente, dotaría de sentido al procedimiento y a los conceptos que se ponen en juego.Desafortunadamente está fuera del currículo de 2º de Bachillerato, donde los conceptos teóricos prescinden de su justificación. Por ejemplo, tendríamos la siguiente actividad:

Explique brevemente (en no más de cinco líneas) cómo se aplica el método de Gauss para calcular el rango de una matriz.

Al analizar estas actividades, según este criterio, nos hemos encontrado con cuestiones propuestas en estas pruebas, que tienen dos apartados que corresponden a tipos de actividades diferentes. Por tanto podemos considerar que nuestra muestra es de 103 actividades.

Tabla 4.7.2: Clasificación de actividades propuestas en las Pruebas de Acceso a la Universidad.

	NM	AC	CM	PD	MA	PT
Frecuencia	12	2	57	6	19	7
Porcentaje	11’7%	2%	55’3%	5’8%	18’4%	6’8%

Observamos que el mayor peso en las actividades propuestas en las Pruebas de Acceso a la Universidad corresponde a los ejercicios rutinarios de cálculo, siendo las actividades de aplicación del cálculo matricial las que presentan un porcentaje menor. Esto no coincide con lo que dice el currículo sobre los criterios de evaluación en la asignatura de Matemáticas II:

Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices y determinantes como instrumento para representar e interpretar datos y relaciones, y resolver ecuaciones que se presentan habitualmente en problemas relacionados con la organización de datos y la geometría analítica.

Sin embargo, deberíamos recordar la valoración de la CIUG sobre los conocimientos de los alumnos en esta materia: el Álgebra la parte de la asignatura que más se trabaja aunque los cálculos y procedimientos que utilizan los alumnos parecen ser hechos de forma rutinaria. Parece lógico que los alumnos trabajen en el aula mayoritariamente ejercicios rutinarios de cálculo matricial si son estos los que aparecen con mayor frecuencia en la Pruebas de Acceso a la Universidad.

4.7.1. Análisis semiótico de los problemas de selectividad.

Intentaremos en este apartado realizar un pequeño análisis de algunos problemas tomados de las Pruebas de Acceso a la Universidad. Nos servirá además para ilustrar con ejemplos cada uno de los seis tipos en que hemos clasificado a estas actividades en el apartado anterior. Pretendemos estudiar la complejidad cognitiva de unas tareas aparentemente sencillas.

Para empezar, señalaremos en el texto las unidades iniciales de análisis; a continuación veremos los componentes praxeológicos, es decir, componentes y unidades elementales (lenguaje, situaciones, acciones, conceptos, propiedades y argumentos); por último, los conflictos semióticos potenciales (Godino, 2002b, 2003b) que pueden explicar, al menos parcialmente, las dificultades potenciales de los alumnos en el proceso de estudio.

Las componentes del significado sistémico están agrupadas en las seis categorías, señaladas por Godino (2002b) siguientes:

- lingüísticas (términos y expresiones, notaciones y gráficos)
- situacionales (problemas, ejemplos, ejercicios)
- actuativas (operaciones, técnicas, procedimientos)
- conceptuales (formulación de las reglas que definen los conceptos)
- proposicionales (enunciado de propiedades y atributos de los conceptos y operaciones)
- validativas (argumentaciones que validan las proposiciones)

También se estudian los conflictos semióticos entre los significados expresados en el texto y los atribuidos a dichas expresiones por una institución de referencia, que en este caso viene dada por la interpretación que hace la investigadora de los textos sobre Álgebra Linea. Dichos conflictos se refieren a toda disparidad entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa; los conflictos semióticos se consideran como explicaciones potenciales de las dificultades y limitaciones de los aprendizajes.

En una primera fase del análisis consideramos útil clasificar la información del texto en según la tipología de objetos matemáticos propuesta por Godino (2002b): *Lenguaje, situaciones, procedimientos, conceptos, propiedades y argumentaciones* (entidades primarias). Estas entidades pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones: personal-institucional, ostentiva-no ostentiva, extensiva-intensiva, elemental-sistémica y expresión-contenido.

Comenzaremos realizando un análisis semiótico de cada uno de los problemas utilizados como ejemplo para pasar a analizar los componentes sistémicos.

1. Ejercicios que utilizan notación matricial.

Texto y unidades primarias de análisis (Galicia, Junio 2005)

1.1	Halle todas las matrices $A = (a_{ij})$,
1.2	cuadradas de orden 3,
1.3	tales que $a_{21} = a_{32} = 0$
1.4	y $A+A^T = 4I$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y A^T la matriz traspuesta de A,
1.5	de las que además se sabe que su determinante es 10

Componentes y unidades elementales.

- *Lenguaje:*
  - Términos y expresiones: matriz, matriz cuadrada, matriz identidad, matriz traspuesta, determinante.
  - Notaciones: $A = (a_{ij})$, a_{21}, a_{32}, A^T, I
- *Situaciones*: Hallar todas las matrices que cumplen unas determinadas propiedades.
- *Procedimientos / Técnicas*: Suma de matrices, cálculo de la traspuesta, multiplicación de un número por una matriz, cálculo de determinantes.
- *Conceptos*: matriz, matriz cuadrada, matriz identidad, matriz traspuesta, determinante, orden de una matiz, elementos de una matriz.
- *Propiedades*: el determinante de una matriz es igual al de su matriz traspuesta.

Conflictos semióticos potenciales.

1.1. Cuando se dice hallar todas las matrices se le da a entender al alumno que hay más de una solución al problema, lo cual siempre representa un conflicto, ya que, por regla general, el estudiante siempre se siente más seguro cuando el problema le conduce a una solución única; se supone de todas formas que los alumnos que se presentan a este examen conocen este tipo de problemas como resultado de su aprendizaje a lo largo del curso escolar. Un conflicto semiótico potencial es no saber cuántas soluciones aparecerán. En la resolución del problema encontraremos dos soluciones, pero a alguien no experto le quedará la duda de si está presentando todas las soluciones pedidas o no. Normalmente este tipo de situaciones no están asociadas a un algoritmo que conduzca directamente a la solución, lo que representa una dificultad añadida.

1.2. Se atribuye una propiedad a las matrices pedidas.

1.3. Se supone que a_{21} y a_{32} son elementos de la matriz A, aunque no se mencione en el problema.

1.4. Consideramos que la descripción de la operación a realizar es detallada, sabiendo además que estamos ante un examen que valora los conocimientos básicos del alumno sobre la materia como el significado de I y A^T.

1.5. En este punto viene implícito un conocimiento teórico como es la igualdad entre los determinantes de A y A^T; esta igualdad se menciona implícitamente con la palabra *las*.

Componentes sistémicos.

1- *Lenguaje*: La tarea se presenta con un lenguaje verbal y algebraico. El alumno ha de conocer el significado de los términos matriz, matriz cuadrada, matriz identidad, matriz traspuesta y determinante y de las notaciones $A = (a_{ij})$, a_{21}, a_{32}, A^T, I para poder enfrentarse con éxito a la actividad propuesta. Los objetos tienen naturaleza algebraica e implican una serie de objetos de naturaleza conceptual u operatoria, por ejemplo, los sistemas de ecuaciones, necesarios para resolver la tarea. Todos los símbolos y notaciones utilizadas se refieren al tema de matrices y determinantes, por lo que el alumno no ha de poner en juego otro tipo de conocimientos.

2- *Situaciones-problema*: El enunciado describe una situación matemática. Con ella se pretende examinar al alumno sobre la destreza que presenta al manejar las propiedades de las matrices. Se supone que el estudiante está familiarizado con las notaciones utilizadas en el enunciado de la tarea y con enunciados del tipo "hallar todas…". La palabra *todas* indica al alumno la posibilidad de que el problema tenga infinitas soluciones. Hemos de recordar que estos problemas se presentan al final de un año que el alumno ha dedicado a preparar este examen, por lo que es de suponer que ha resuelto situaciones similares.

3- *Procedimientos*: La tarea pide explícitamente el cálculo de unas matrices que cumplan unas determinadas propiedades. Sería de extraordinaria dificultad con otros números pero el hecho de que se incluyan ceros entre algunos de los elementos de la matriz que se debe calcular y que la suma de la matriz con su traspuesta sea un múltiplo de la identidad (lo que implica que las ecuaciones calculadas serán igualadas a cero) simplifica enormemente los cálculos. La realización de la actividad se apoya en un conocimiento implícito de la resolución de ecuaciones. La resolución efectiva de la tarea por parte de un sujeto conllevaría que califiquemos a ese sujeto como competente en el manejo de las propiedades de matrices y en la resolución de ecuaciones. Sin embargo, no parece que la actividad pueda indicar que el sujeto comprenda el papel de estos objetos.

4- *Conceptos*: La tarea pone más en juego el conocimiento de las operaciones que los conceptos. Realmente no hace falta entender el concepto de matriz ni el de determinante para resolver la actividad, basta con saber operar con ellos.

5- *Proposiciones*: Aparte de saber que el determinante de una matriz y el de su traspuesta son iguales, la única propiedad, por llamarla de alguna forma, que es necesario conocer para resolver el problema es que dos matrices son iguales si lo son elemento a elemento.

6- *Argumentos*: Lo ideal sería que el alumno argumentara el porqué de su resolución, pero ya veremos más adelante, cuando estudiemos las respuestas de los estudiantes en los exámenes, que esta situación se produce muy pocas veces. La argumentación esperable sería encontrar una matriz del tipo A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$, comentar qué es la matriz traspuesta y plantear la ecuación pedida. Los elementos que no se puedan calcular después de igualar elemento a elemento se calcularán mediante la condición de que el determinante es 10.

2. Ejercicios de aplicación del cálculo matricial.

<u>Texto y unidades primarias de análisis.</u> (Castilla-La Mancha, Junio 2002, Matemáticas aplicadas)

2.1	En una clínica dental colocan tres tipos de prótesis P_1, P_2, P_3 en dos modelos diferentes M_1 y M_2. El número de prótesis que tienen ya construidas viene dado por la matriz B y el precio de cada una la matriz A $A = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 16 & 12 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 150 & 160 & 240 \\ 210 & 190 & 220 \end{pmatrix} \end{array}$
2.2	a) Obtener, si es posible, las matrices C = AB y D = BA.
2.3	b) ¿Qué información proporcionan los elementos c_{12} de la matriz C y el elemento

2.4	d_{22} de D? c) ¿Qué elemento de C o de D proporciona el valor total de todas las prótesis de tipo P_2?

Componentes y unidades elementales.

- *Lenguaje*:
  - Términos y expresiones: matriz, elemento de una matriz.
  - Notaciones: c_{12}, d_{22}

$$A = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 16 & 12 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 150 & 160 & 240 \\ 210 & 190 & 220 \end{pmatrix} \end{array}$$

- *Situaciones*: Obtención de unas matrices e interpretación de sus elementos.
- *Procedimientos / Técnicas*: producto de matrices.

Conflictos semióticos potenciales.

2.1. Se le asigna un significado al problema intentando simular una situación real. En las matrices, se introducen las notaciones M_1, M_2, P_1, P_2, P_3 para señalar qué indican las filas y columnas de las matrices.

2.2. Se propone una técnica: el producto de matrices. Es de destacar la frase “es posible”, lo que obliga al alumno a reflexionar sobre si puede o no utilizar la técnica del producto, en función de las respectivas dimensiones.

2.3. Se introduce una actividad que obliga al alumno a reflexionar sobre el significado de lo que ha calculado en el apartado anterior. Implícitamente se le pide que razone sobre el significado exacto del producto de matrices y, también implícitamente, sobre su definición teórica. El estudiante deberá ir de nuevo al apartado anterior y volver a hacer las cuentas que le sirvieron para calcular los elementos pedidos, pero esta vez desglosándolas, en vez de hacerlas casi de memoria, y observando qué elementos están multiplicando. Por tanto, en esta situación, no sólo hay que aplicar un procedimiento, sino demostrar que se ha entendido realmente ese procedimiento. Esto supone un conflicto potencial para el alumno, ya que la multiplicación de matrices se estudia como un algoritmo de cálculo y aquí se pide razonar sobre lo que significa cada elemento de las matrices con las que está trabajando. Puede incluso suponer una ruptura del contrato didáctico, si no ha realizado actividades similares anteriormente.

2.4. Es un colofón al apartado anterior, otra vez una pregunta de índole interpretativa. Sin embargo, el enfoque es diferente: mientras que la cuestión b) pedía *interpretar* el significado de un elemento concreto de la matriz C, en este caso se pide *encontrar* un elemento en una de las matrices que signifique una condición determinada. Ambas cuestiones pretenden indagar sobre el significado que los alumnos asignan al cálculo de matrices y a los elementos de una matriz.

Componentes sistémicos.

1- *Lenguaje*: El lenguaje utilizado es del tipo verbal y matricial. Se presenta la información en forma de matrices, indicando lo que significa cada fila y cada columna. Realmente el lenguaje es quizás el componente más importante de esta actividad, ya que se pide al alumno que lo interprete correctamente. Realizar con éxito los apartados b y c de la tarea significa conocer el significado de cada uno de los elementos de las matrices puestas en juego. Como estamos hablando de actividades presentadas a alumnos de 17-18 años, consideramos que entender la situación verbal presentada (una clínica dental donde se colocan tres tipos de prótesis en dos modelos diferentes) no ha de representar ninguna dificultad añadida.

2- *Situaciones-problema*: El enunciado describe una situación imaginaria potencialmente realizable, como es la contabilidad de una clínica. Este ejemplo está aquí en lugar de un tipo de experiencias y situaciones de información dada en forma matricial. El problema tiene tres apartados, por lo que podemos hablar de tres subproblemas. El primero de ellos es un ejercicio de cálculo rutinario, en el que se pide al alumno que realice dos multiplicaciones de matrices. La información dada en el enunciado principal no es necesaria para resolver este apartado. Es diferente el planteamiento de las dos partes siguientes. En ellas el alumno no tiene que realizar ningún cálculo, sólo interpretar los ya hechos. Esto nos da mucha más información acerca de la verdadera comprensión del alumno acerca de este tema.

3- *Procedimientos*: La tarea pide explícitamente la realización de dos multiplicaciones de matrices en el primer apartado e implícitamente la interpretación del resultado. Buscar el valor total de todas las prótesis de tipo P_2 sin calcular las matrices C y D sería de bastante dificultad, por lo que pensamos que tal y como están planteadas las preguntas en los diferentes apartados se proporciona una ayuda al alumno para guiar su razonamiento haciendo el menor número posible de cálculos. Estamos ante una actividad asociada a un algoritmo que los estudiantes han aplicado repetidas veces a lo largo del curso académico; pero la actividad no es sólo la aplicación del algoritmo sino la interpretación del resultado y la justificación de por qué se puede aplicar.

4- *Conceptos*: Los conceptos fundamentales puestos en juego son el de matriz, multiplicación de matrices y elemento de una matriz. No sólo es necesario saber multiplicar matrices de forma mecánica para contestar a la cuestión planteada, sino también entender de qué forma está calculado cada uno de los elementos de la matriz producto.

5- *Argumentos*: El alumno necesitará justificar el porqué de sus respuestas en los últimos dos apartados. Además está justificación será verbal, no una demostración matemática en el sentido estricto. De todas formas, las características de la actividad exigen una descripción detallada de la forma de aplicar el algoritmo “producto de matrices” para que el estudiante demuestre qué entiende su significado.

3. Ejercicios de cálculo matricial.

<u>Texto y unidades primarias de análisis.</u> (Castilla y León. Junio 2002. Matemáticas aplicadas).

3.1	Se considera el sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ my+z=0 \\ x+(1+m)y+mz=m+1 \end{cases}$
3.2	a) Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro m.
3.3	b) Resuelve el sistema para m = 0.

<u>Componentes y unidades elementales.</u>

- *Lenguaje*:
  - Términos y expresiones: Discusión de un sistema.
  - Notaciones: $\begin{cases} x+y=1 \\ my+z=0 \\ x+(1+m)y+mz=m+1 \end{cases}$
- *Situaciones*: Discusión y resolución de un sistema de ecuaciones dependiente de un parámetro.
- *Conceptos*: Sistema de ecuaciones, parámetro, discusión de un sistema, resolución de un sistema, solución.
- *Propiedades*: Teorema de Rouché-Fröbenius.

Conflictos semióticos potenciales.

3.1. Se comienza presentando el sistema de ecuaciones que hay que resolver, lo que implica un juego de parámetros e incógnitas. Probablemente el alumno haya sido entrenado en abundancia sobre este juego, en el contexto de la resolución de sistemas lineales.

3.2. Se asume que el alumno interpreta lo que es discutir un sistema de ecuaciones y que no es el primero con el que se enfrenta. El enunciado del problema está formulado pensando que para el estudiante esta actividad no es un problema, sino un simple ejercicio rutinario. Aunque no se menciona, implícitamente se está pidiendo al alumno que utilice el teorema de Rouché-Frobenius, lo que no tendría que suponer un conflicto para un alumno que ha superado 2º de Bachillerato.

3.3. Se supone que el sistema tiene solución para m = 0, pero, de todas formas, la resolución de este apartado depende de la resolución del apartado anterior.

Componentes sistémicos.

1- *Lenguaje*: Es de tipo notacional y verbal. No se plantea ninguna situación que salga de lo estrictamente matemático, por lo que el alumno no requerirá otro tipo de conocimientos que estos.

2- *Situaciones-problema*: Se plantea una tarea que ha de resultar rutinaria para un alumno que ha superado 2º de Bachillerato.

3- *Procedimientos*: Discutir un sistema de ecuaciones equivale a comparar el rango de la matriz del sistema con el de la matriz ampliada, por lo que el problema pide decidir el rango de estas dos matrices según el valor del parámetro m.

4- *Conceptos*: El alumno ha de conocer el concepto de parámetro, el cual aparecerá en la actividad por partida doble: por un lado, el sistema que se debe discutir depende de un parámetro; por otro, se pide resolver el sistema para el caso m = 0, caso en el que el sistema es compatible indeterminado, por lo que la solución dependerá de otro parámetro. Encontramos un conflicto semiótico potencial el hecho de que en la situación-problema aparezcan dos parámetros, tanto a nivel conceptual como a nivel notacional.

5- *Propiedades*: Aunque el problema no lo menciona, se requiere el conocimiento y la aplicación del teorema de Rouché-Fröbenius.

6- *Argumentos*: La actividad no requiere la explicación ni la justificación de los pasos a seguir, lo que hace que se convierta en una actividad mecánica.

4. Propiedades de los determinantes.

Texto y unidades primarias de análisis. (Galicia, Junio 2003)

4.1	Calcule, por transformaciones elementales
4.2	(sin emplear la regla de Sarrus)
4.3	y justificando los pasos,
4.4	el determinante $\begin{vmatrix} 2+a & b & c \\ a & 2+b & c \\ a & b & 2+c \end{vmatrix}$

Componentes y unidades elementales.

- *Lenguaje*:
  - Términos y expresiones: Transformaciones elementales, regla de Sarrus, determinante.
  - Notaciones: $\begin{vmatrix} 2+a & b & c \\ a & 2+b & c \\ a & b & 2+c \end{vmatrix}$
- *Situaciones*: Cálculo de un determinante, con condicionantes técnicos ("sin emplear la regla de Sarrus")
- *Procedimientos / técnicas*: Emplear la técnica de transformaciones elementales y justificar los pasos.
- *Conceptos*: Determinante, transformaciones lineales elementales, combinaciones lineales.
- *Propiedades*: 1. Si a una fila o columna de un determinante se le suman combinaciones lineales de otras de sus filas o sus columnas, el determinante no varía. 2. Multiplicar un número por un determinante equivale a multiplicar una fila o columna por dicho número.

Conflictos semióticos potenciales.

4.1. Se formula el problema a resolver y la técnica que hay que emplear. El término "transformaciones elementales" es para el alumno el término usado en clase de manera transparente. Para la mayoría de los estudiantes, sin embargo, lo elemental sería aplicar la regla de Sarrus para calcular el determinante. Encontramos un posible conflicto en el hecho de que el alumno, aplicando transformaciones elementales, puede escoger varios caminos para calcular este determinante (por ejemplo, sumando la segunda y tercera columna a la primera, o intentando conseguir ceros en alguna de las columnas). Puede que el alumno no sea capaz de decidir cómo empezar, aunque este tipo de elecciones son propias del trabajo matemático.

4.2. En este caso se excluye expresamente utilizar la regla de Sarrus, lo que condiciona los tipos de procedimientos a usar para resolver la situación.

4.3. Quizás sea esta frase la que hace que esta actividad pase de ser un ejercicio a un auténtico problema: se demanda explícitamente al estudiante el conocimiento del proceso a seguir describiendo y justificando cada paso que realiza. Esto supone un conflicto semiótico potencial, ya que puede ser que el alumno no sepa exactamente cómo justificar esos pasos: ¿hay que remitirse a una propiedad de los determinantes? (solución experta); ¿hay que explicar por qué se hace cada paso? Es muy probable que el alumno haya resuelto en el aula una actividad similar y sepa llegar a la solución de un modo casi automático, lo que le resultará más conflictivo dar una justificación de los pasos realizados.

4.4. Se muestra el determinante que se ha de calcular. No se indica qué son *a, b* y *c*, por lo que se da por supuesto que son números reales.

<u>Componentes sistémicos.</u>

1- *Lenguaje*: Es de tipo verbal. Se indica al alumno lo que tiene que hacer y por qué método. Un posible conflicto semiótico está en la expresión “transformaciones elementales”, en vez de “usando las propiedades de los determinantes”, más familiar para el alumno.

2- *Situaciones-problema*: Los condicionantes pueden convertir esta actividad de una tarea rutinaria en un problema, aunque es muy probable que en el aula se hayan planteado situaciones similares. De todas formas, no es una actividad asociada a un algoritmo.

3- *Procedimientos*: Es necesario que el alumno sepa a qué se refiere la expresión transformaciones elementales y que entienda que no hay sólo un camino para llegar a la solución del problema, es decir, la solución experta indica que hay que sumar a una fila o columna una combinación lineal de las restantes, pero hay múltiples combinaciones. Es el sujeto el qué debe decidir qué pasos dar para resolver la actividad.

4- *Conceptos*: Aunque el problema no lo dice explícitamente, es necesario el concepto de combinación lineal, ya que es precisamente en sumar o restar combinaciones lineales de filas o columnas en lo que se basan las "transformaciones elementales" que menciona el enunciado del problema.

5- *Propiedades*: El conocimiento de las propiedades de los determinantes y la aplicación de las mismas es fundamental para la correcta aplicación del problema.

6- *Argumentos*: Como ya se mencionó antes, el hecho de que se pida la justificación de los pasos dados puede suponer el mayor conflicto para el estudiante, acostumbrado, en la mayoría de los casos a realizar sus acciones sin necesidad de reflexionar sobre ellas. Se exige una descripción detallada de los pasos a seguir.

5. Modelización algebraica de una situación.

<u>Texto y unidades primarias de análisis.</u> (Andalucía, junio 2002, Matemáticas Aplicadas)

5.1	Un cliente de un supermercado ha pagado un total de 156 euros por 24 litros de leche, 6 kilos de jamón serrano y 12 litros de aceite de oliva.
5.2	Plantee y resuelva un sistema de ecuaciones para calcular el precio unitario de cada artículo,
5.3	sabiendo que un litro de aceite cuesta el triple de un litro de leche y
5.4	que un kilo de jamón cuesta igual que 4 litros de aceite más 4 litros de leche.

<u>Componentes y unidades elementales.</u>

- *Lenguaje*:
  - Términos y expresiones: sistema de ecuaciones.
- *Situaciones*: problema que exige modelizar algebraicamente una situación, mediante un sistema de ecuaciones lineales, y luego resolver dicho sistema.
- *Conceptos*: magnitudes, relaciones entre magnitudes, proporcionalidad.

<u>Conflictos semióticos potenciales.</u>

5.1. Se requiere que el alumno sea capaz de traducir este enunciado a lenguaje algebraico.

5.2. El enunciado sugiere el método que hay que aplicar para resolverlo.

5.3. Esta frase podría dar lugar a un conflicto semiótico, ya que muchas veces los estudiantes no interpretan correctamente la expresión "triple". ¿Quién es el triple de quién? ¿Cuál es el mayor? Puede plantearse una confusión entre $x = 3z$ ó $z = 3x$.

5.4. Esta información, por el contrario, sería más fácil de interpretar por los alumnos, pudiendo plantear la ecuación sin dificultades.

Componentes sistémicos.

1- *Lenguaje*: Es de tipo verbal, utilizando un lenguaje que es familiar al alumno.

2- *Situaciones-problema*: Se exige la modelización algebraica de una situación. La situación es conocida por el alumno, ya que a lo largo de su experiencia escolar el planteamiento de este tipo de sistemas de ecuaciones ha sido habitual.

3- *Procedimientos*: El alumno identificará el problema como un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que a lo largo del año académico siempre se resuelve por Gauss o Cramer. Efectivamente el estudiante puede resolverlo utilizando estos métodos. Sin embargo, en este caso, el planteamiento de la actividad hace que se pueda resolver por sustitución fácilmente en sólo dos pasos. Para el estudiante, otro planteamiento que los habituales puede representar un conflicto, aunque las acciones a realizar sean más sencillas.

4- *Conceptos*: El concepto de proporcionalidad está implícito en el enunciado del problema, así como el de relación entre magnitudes. No es necesario a priori utilizar ningún concepto relacionado con el Álgebra Lineal estudiada este curso, aunque si el alumno utiliza los métodos de Gauss o Cramer para resolver el sistema necesitará poner en juego más conocimientos.

6. Preguntas teóricas.

Texto y unidades primarias de análisis. (Galicia, junio 2004)

6.1	Explique brevemente (en no más de cinco líneas) cómo se aplica el método de Gauss
6.2	para calcular el rango de una matriz.

Componentes y unidades elementales.

- *Lenguaje*:
  - Términos y expresiones: método de Gauss, rango de una matriz.
- *Situaciones*: justificación del empleo de una técnica.
- *Procedimientos / técnicas*: método de Gauss.

- *Conceptos*: rango de una matriz, dependencia e independencia lineal, transformaciones lineales, combinaciones lineales.
- *Argumentaciones*: justificar sintéticamente la validez de una técnica para un propósito determinado.

Conflictos semióticos potenciales.

6.1. Se pide explicar la aplicación de una técnica algorítmica, que el alumno realiza, en este momento de estudio, casi de forma automática. Por lo tanto se le está obligando a razonar sobre las razones que justifican y dan validez al procedimiento aplicado. El conflicto semiótico potencial es de naturaleza no ostensiva, ya que el alumno sabe como utlizar el método de Gauss, la dificultad radica en expresarlo gramaticalmente.

6.2. El método de Gauss se puede aplicar para varias cosas: cálculo de un determinante, cálculo del rango de una matriz o resolución de un sistema de ecuaciones. Al pedir que se utilice para el cálculo del rango se está demandando al estudiante, implícitamente, que aclare el significado de conceptos tales como el rango de una matriz, dependencia e independencia lineal, combinación lineal e identificación de vectores como las filas (o las columnas) de una matriz.

Componentes sistémicos.

1- *Lenguaje*: Es de tipo verbal, utilizando términos conocidos por el alumno.

2- *Situaciones-problema*: Se requiere la realización de una tarea (justificación de una técnica) para la que es posible que el sujeto no haya recibido instrucción suficiente, lo que supone un conflicto semiótico potencial.

3- *Procedimientos*: El alumno conoce a estas alturas de su formación académica cómo aplicar el método de Gauss, pero eso no es lo que exige esta actividad.

4- *Conceptos*: En el enunciado vemos que sólo se requiere el conocimiento del concepto "rango de una matriz", pero el alumno necesitará otros para explicar el desarrollo de la técnica pedida: dependencia e independencia lineal, transformaciones lineales, combinaciones lineales. Aun en el caso de que el estudiante no utilice estos términos en su exposición, estos conceptos deberán aparecer implícitamente.

5- *Propiedades*: Serán necesarias las propiedades de los determinantes, aunque éstos no se mencionen. Dichas propiedades siempre se explican en el aula al exponer la unidad de determinantes, pero tienen igual aplicación para el cálculo del rango mediante transformaciones elementales. El alumno ha de ser capaz de establecer esta relación.

6- *Argumentos*: Justificar una técnica siempre supone un conflicto para el estudiante, aunque en este caso se pide más una explicación que una justificación, es decir, hay que indicar *qué* se hace, mas que *por qué* se hace.

4.7.2. Conclusiones del estudio de los exámenes.

Tras analizar el contenido de diversos exámenes de Selectividad hemos llegado a las siguientes conclusiones:

- No encontramos auténticos problemas en estas pruebas, pese a que distintos autores (por ejemplo, Mercado, 2004) consideran que la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ha de partir de la resolución de problemas. Se pretende comprobar con estas tareas si el alumno ha logrado el dominio de ciertas técnicas y sabe relacionar algunos conceptos y aplicar propiedades que se estudian en 2º de Bachillerato, lo que le permitirá acceder a estudios posteriores. Además, la única actividad que realmente se podría considerar problema tiene un contenido estrictamente matemático: *Demuestre que toda matriz cuadrada 3-dimensional se puede escribir como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.*
- Las actividades rutinarias son mucho más numerosas que aquellas que exigen al alumno reflexión previa para resolverlas: 71,9% frente a 27,1%. La mayoría de las tareas propuestas sólo necesitan de la aplicación de un algoritmo para ser resueltas. Incluso las actividades que piden al alumno un previa traducción al lenguaje algebraico, o poner en juego otros conocimientos matemáticos, se resuelven, tras ese paso previo, aplicando un algoritmo, normalmente el método de Gauss. Esta forma de plantear las Pruebas de Acceso a la Universidad coincide con lo aprendido por los estudiantes. Dickinson y Eade (2004), en un estudio hecho con estudiantes de once años concluyen que la mayoría de los alumnos que resuelven ecuaciones utilizan reglas no aprendidas y manipulan a ciegas, sin entender su significado real. Así, cuando el alumno tiene unos años más y, por tanto, se le presupone otra madurez matemática, las pruebas y tareas presentadas siguen siendo rutinarias, coincidiendo con aquello que se les ha enseñado a hacer.
- Muchas de las actividades propuestas en estas pruebas coinciden con tareas propuestas en los libros de texto, lo que le permite al alumno estar "entrenado" para resolver un tipo de situaciones rutinarias.

- La mayoría de las actividades consideradas “de aplicación” siguen siendo tareas que quedan dentro del campo de las matemáticas, lo que no permite al alumno ver realmente aplicaciones del Álgebra Lineal.
- Aparecen actividades que obligan al alumno a utilizar una notación matricial (en concreto en la primera las incógnitas de las ecuaciones que resultan son de la forma a_{ij}). Esto suele suponer un conflicto ya que el alumno no considera, por lo general, importante cuidar su forma de escribir el lenguaje matemático. Por otro lado, para un alumno las incógnitas de un sistema de ecuaciones se suelen llamar *x, y, z* o *a, b, c*, por lo que será chocante para ellos la aparición de otras letras, más aun si estas llevan subíndices.
- La interpretación de resultados es, en la mayoría de los casos, conflictiva para el alumno, acostumbrado a resolver un problema numérico y dar únicamente soluciones numéricas. Por tanto, actividades similares a las del apartado dos representan un verdadero problema. Los estudiantes no tienen, a estas alturas, dificultad en calcular un producto de matrices ni en reconocer en qué casos pueden calcularlo y en qué casos no. Sin embargo, una vez que lo pueden hacer siempre tiene sentido para ellos aunque realmente estén multiplicando términos que representen cosas distintas.
- No es normal que se pida en un problema una justificación de los resultados, aunque muchas veces esta justificación está implícita en el resultado. El hecho de exigirla puede suponer una confusión en el alumnado. Esto coincide con lo expresado por Gascón (1998) cuando hablaba de la desaparición progresiva de las justificaciones algebraicas de los procedimientos aritméticos o geométricos.

Consideramos por tanto probada nuestra hipótesis H3: las Pruebas de Acceso a la Universidad presentan mayoritariamente ejercicios rutinarios, no verdaderos problemas.

Capítulo 5.

Significado Institucional de Referencia para el estudio de Matrices y Determinantes en 2º de Bachillerato: Análisis Semiótico de un texto.

5.1- *Introducción.*

Una clase de estudios primarios en Didáctica debe orientarse a determinar o caracterizar los significados institucionales, especialmente el significado en las instituciones matemáticas; es necesario ver cuáles son los usos característicos de los conceptos, proposiciones y teorías matemáticas, y las situaciones problemáticas fundamentales que incorporan las notas esenciales de las nociones, así como identificar las notaciones que podríamos llamar canónicas. Una vez caracterizado el significado de referencia, estaremos en condiciones de comprender las características del significado de los objetos matemáticos en las instituciones de enseñanza y tratar de estudiar los factores condicionantes que operan en su constitución y desarrollo. (Godino y Batanero, 1998a)

En este capítulo utilizaremos la técnica del análisis semiótico (Godino, 2002b, Arrieche, 2002) descrita en el apartado 1.4.4 aplicándola a las unidades 2 y 3 de un manual de Matemáticas II (Colera, García, Oliveira, 2003) usado en el curso de 2º de Bachillerato. El propósito fundamental que tiene la realización de dicho estudio es intentar caracterizar los significado elementales y sistémicos (o praxeológicos) puestos en juego, basados en nuestra interpretación del texto usado en el proceso de aprendizaje. El bloque de Álgebra comprende 98 páginas del libro de texto (de la página 28 a la 126), por lo que pretender realizar un análisis semiótico de todo el bloque sería demasiado extenso.

Nos centraremos, por tanto, en las unidades 2 y 3 correspondientes a *matrices* y *determinantes*, y lo haremos sólo en su parte teórica, sin incluir las actividades resueltas y propuestas, salvo que sean ejemplos directos asociados al sentido de las nociones que se introducen. Para cada uno de estos contenidos incluimos el texto y las unidades de análisis, los componentes praxeológicos, y los conocimientos puestos en juego (interpretados como funciones semióticas). Proponemos como una primera clasificación de las unidades de análisis semiótico de un texto matemático la siguiente: unidades iniciales (apartados o secciones del texto), unidades primarias (oraciones o sentencias) y unidades elementales (términos y expresiones que designan entidades elementales).

Para facilitar su lectura reproducimos el texto analizado. Cada bloque de contenido se finaliza con la descripción de los conocimientos puestos en juego, entendidos como funciones semióticas elementales establecidas entre los distintos objetos identificados, y de los conflictos semióticos

5.2. *Unidades de análisis. Tipología de objetos y conocimientos elementales.*

5.2.1- Álgebra de Matrices.

Esta unidad está dividida en cinco secciones que consideraremos como unidades iniciales de análisis. Son las siguientes:

1. Nomenclatura. Definiciones.
2. Operaciones con matrices.
3. Propiedades de las operaciones con matrices.
4. Matrices cuadradas.
5. Complementos teóricos para el estudio de matrices.

1. Nomenclatura. Definiciones.

Texto y unidades primarias de análisis.

1.1 **2.1 NOMENCLATURA. DEFINICIÓNS**

As seguintes táboas numéricas son matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 & 4 \\ 3 & 0{,}5 & 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{2} & 4 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & \frac{2}{7} & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 10 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

1.2 Son caixas rectangulares formadas por **filas** e **columnas**.

1.3 A primeira é unha matriz de 3 filas e 4 columnas. A súa **dimensión** é 3×4.

1.4 A segunda é unha matriz de dimensión 1×5 (1 fila, 5 columnas). A este tipo de matrices chámaselles **vectores fila**. Esta é un vector fila de dimensión 5.

A terceira é un **vector columna** de dimensión 4 (é unha matriz 4×1).

1.5 A cuarta é unha matriz 3×3. Chámase **matriz cadrada** de orde 3.

1.6 ◆ As matrices son táboas numéricas rectangulares:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Esta é unha matriz de m filas e n columnas. É de **dimensión** $m \times n$. Os elementos, a_{ij}, son números reais ($a_{ij} \in \mathbb{R}$).

Ó designar unha matriz xenérica, como a anterior, cada termo ten dous subíndices que indican a fila e a columna ás que pertence. O termo a_{23} é o que está na segunda fila e terceira columna. Para simplificar, a matriz anterior pódese designar así:

$(a_{ij})_{j=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,m}$ ou ben $A = (a_{ij})_{m,n}$ ou, simplemente, (a_{ij})

Se $m = n$, dise que a matriz é **cadrada**.

1.7 ◆ Dúas **matrices** son **iguais** cando son da mesma dimensión e, ademais, coinciden termo a termo:

$$\left.\begin{array}{l} A = (a_{ij})_{m,n} \\ B = (b_{ij})_{m,n} \end{array}\right\} A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

1.8 **NOMENCLATURA**

A transposta da matriz A tamén se acostuma designar por A':

$$A' = A^t$$

◆ Chámaselle **transposta** dunha matriz $A = (a_{ij})_{m,n}$ a outra matriz $A^t = (a_{ji})_{n,m}$ que se obtén ó cambiar en A as filas polas columnas e as columnas polas filas.

1.9 ◆ Unha matriz A chámase **simétrica**, se $A^t = A$. Para que unha matriz sexa simétrica, necesariamente ha de ser cadrada.

1.10 ◆ $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ Esta matriz chámase **triangular** porque é cadrada, e todos os elementos que están debaixo da diagonal principal son iguais a cero.

Observa os seguintes exemplos:

1.11 **1.** A matriz transposta de $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ é $A^t = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

A matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -5 \\ 6 & 0 & 4 \\ -5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ é simétrica porque $B^t = B$.

1.12 **2.** O consumo, en quilos, de pan, carne e manteiga dunha familia durante os anos 1998, 1999, 2000 e 2001 disponse así:

	PAN	CARNE	MANTEIGA
98	430	165	8
99	320	183	6
00	410	171	7
01	360	112	10

Este exemplo dá lugar a unha matriz 4 × 3.

OBSERVA

O exemplo 2 é moi inxenuo, pero podemos imaxinar unha situación máis real: o consumo de todo un país (miles de productos) e o consumido cada mes durante moitos anos...

Sería unha inmensa matriz de moitas filas e moitísimas columnas.

3. Unha rapaza contabiliza as horas que dedica a "clase", "estudio", "televisión" e "amigos" día a día, durante unha semana, do seguinte xeito:

	CLASE	ESTUDIO	TV	AMIGOS
L	6	2	1	2
M	5	3	2	1
X	8	1	0	2
J	6	1	2	1
V	5	4	0	4
S	1	2	3	6
D	0	2	4	6

É fácil recoñecer nesta caixa unha matriz de 7 filas e 4 columnas.

<u>Componentes y unidades elementales.</u>

- *Lenguaje*:
  - Términos y expresiones: Tablas numéricas, matrices, cajas rectangulares, filas, subíndices, columnas, dimensión, vector fila, vector columna, matriz cuadrada, término, matrices iguales, coincidir término a término, traspuesta, simétrica, triangular, orden de una matriz cuadrada, diagonal principal.
  - Notaciones: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, m×n, a_{ij}, $A = (a_{ij})_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,m}$, $A = (a_{ij})_{m,n}$,

    A^T, $(a_{ji})_{n,m}$

- *Situaciones*: Ejemplos de matrices de diferente dimensión; matrices traspuestas (1.1, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.11). Ejemplos de tablas numéricas (1.12)
- *Conceptos*: Matrices, fila, columna, vector fila, vector columna, matriz cuadrada, matrices iguales, traspuesta, simétrica, triangular.
- *Propiedades*: 1. Los elementos a_{ij} son números reales. 2. para que una matriz sea simétrica, necesariamente ha de ser cuadrada.
- *Argumentos:* Sólo se intenta justificar las definiciones de los nuevos objetos mediante ejemplos. No se justifican las propiedades.

<u>Conflictos semióticos potenciales.</u>

1.1 Se presentan las matrices a partir de ejemplos y suponiendo que el lector conoce el término "tabla numérica" como resultado de aprendizajes anteriores (y no en este contexto). Esta forma de introducir estos objetos provoca conflictos semióticos como identificar matriz, tabla "numérica" y "caja rectangular" y que el alumno conteste a la pregunta "¿Qué es una matriz?" poniendo un ejemplo.

1.2 Se suponen transparentes (Gascón, 1998) los términos "filas" y "columnas", por corresponderse con su uso en el lenguaje ordinario, aunque el uso de "fila" en el lenguaje ordinario no se aplicaría en el caso del vector columna, ni "columna" en el vector fila.

1.3 Se usa la expresión "dimensión" para designar el número de filas y columnas de una matriz, con una notación multiplicativa (combinativa) que queda por justificar (nº de elementos total de la matriz).

1.4 Se introducen los términos "vector fila" y "vector columna" mediante ejemplos.

1.5 Se introduce el término "matriz cuadrada" aunque anteriormente se había mencionado que las matrices eran "cajas rectangulares". Esta descripción es muy confusa (las cajas son tridimensionales) intentando relacionarla con conocimientos geométricos previos, asociando metafóricamente la forma de las matrices con la de estas figuras geométricas.

1.6 La descripción que se da de matriz es un ejemplo de definición de concepto. Aunque no hay un discurso teórico, se utilizan los comentarios de 1.1 a 1.5 como praxis para introducir nuevas notaciones. Desde el punto de vista matemático institucional no se puede justificar, por ejemplo, la propiedad 1. "los elementos, a_{ij}, son números reales", ya que los elementos de una matriz pueden ser objetos diversos, como números complejos o funciones.

1.7 Se usa la expresión "coinciden término a término" suponiendo transparente la expresión para el estudiante y, además, que puede interpretar la notación "$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$" con sentido.

1.8 Se introduce el término de matiz traspuesta, a través de una notación formal, aplazándose su ejemplificación para 1.11.

1.9 El término "simétrica" aplicado a una matriz no se relaciona en ningún momento con su significado en el lenguaje ordinario (simetría respecto a la diagonal principal: $a_{ij} = a_{ji}$). Su definición se apoya, inmediatamente en la de traspuesta, que todavía no se ha consolidado.

1.10 Se introduce el término "triangular" mediante una praxis, sin mencionar qué pasaría si todos los elementos por encima de la diagonal principal fuesen iguales a 0. Por otro lado, se ha utilizado la expresión "diagonal principal" sin definirla, considerando que el alumno llegará por sí mismo, viendo el ejemplo, a identificar esta diagonal en una matriz. Estamos ante un posible conflicto semiótico: ¿por qué esa diagonal es la principal? (Ferro, 2004)

1.11 Al igual que en 1.9, no se relaciona el término "simétrica" con su significado en el lenguaje ordinario.

1.12 Se menciona que los ejemplos dan lugar a una matriz 4×3 y 7×4 sin escribir la matriz, lo que además de originar conflictos semióticos potenciales, no dota de sentido a la simplicidad de la notación y del uso de matrices en vez de tablas, para representar una amplia tipología de situaciones. De todas formas es un intento de contextualizar los conocimientos pretendidos y aplicarlos a situaciones relacionadas (Godino, Bencomo, Font, Wilhemi, 2006)

En este primer apartado no se incluye ningún elemento operatorio; los objetos que se ponen en juego son de naturaleza lingüística y teórica. Sobre todo destaca la abundancia de nuevos términos y expresiones, que serán utilizados a lo largo de la unidad y que son presentados en este momento.

Componentes sistémicos.

1- *Lenguaje*: Supone la introducción de términos y expresiones nuevas que serán de uso continuado a lo largo de toda la unidad. También se presentan notaciones novedosas para el alumno. Se consideran sabidas ciertas expresiones, como "tablas numéricas".

2- *Situaciones*: Este apartado introduce el campo conceptual (Vergnaud, 1990) que se quiere estudiar. Todos los conceptos presentados se ilustran con ejemplos (situaciones) en los que estos conceptos adquieren sentido.

3- *Conceptos*: Todos los conceptos son novedosos para el alumno, ya que esta unidad didáctica no supone un repaso de algo estudiado en cursos anteriores. Se intenta no darles una excesiva formalidad e ilustrarlos con ejemplos.

4- *Propiedades*: Al ser un apartado introductorio apenas se presentan propiedades. La primera de ellas no es realmente una característica de las matrices, ya que sus elementos pueden ser de otra naturaleza. Sin embargo, en este curso, sólo se trabajará con matrices cuyos elementos sean reales. El alumno interpretará, por el contrario, que los elementos de una matriz son siempre números reales. En cuanto a la segunda propiedad, únicamente se enuncia, sin ofrecer ningún razonamiento, ni formal ni informal, que la demuestre o explique.

5- *Argumentos*: Ausencia de argumentaciones y sólo explicaciones mediante ejemplos.

2. Operaciones con matrices.

<u>Texto y unidades primarias de análisis.</u>

2.1	**2.2 OPERACIÓNS CON MATRICES** As matrices poden sumarse, ser multiplicadas por un número e multiplicarse entre si. Cada unha destas operacións ten as súas peculiaridades e a súa interpretación.
2.2	**Suma de matrices** Para que dúas **matrices** se poidan **sumar**, cómpre que teñan a mesma dimensión. En tal caso, súmanse termo a termo: $(a_{ij})_{m,n} + (b_{ij})_{m,n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m,n}$
2.3	**Producto dun número por unha matriz** Para **multiplicar un número por unha matriz**, multiplícase polo número cada termo da matriz: $k \cdot (a_{ij})_{m,n} = (ka_{ij})_{m,n}$
2.4	Os seguintes exemplos ilustran o manexo destas dúas operacións: **1.** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 16 & 0 \\ 3 & 4 & -5 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & 8 \\ 4 & -2 & 21 & 6 \\ 4 & 5 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

2. As matrices $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ non poden sumarse por non ser da mesma dimensión.

3. Se no exemplo 2 da páxina anterior tivesemos todas as matrices de consumo das familias dunha provincia, a súa suma sería unha matriz
2.5 cos consumos deses productos en toda a provincia.

2.6 **4.** $(-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 16 & 0 \\ 3 & 4 & -5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 2 & -8 \\ -4 & -2 & -32 & 0 \\ -6 & -8 & 10 & -10 \end{pmatrix}$

5. No exemplo 3 da páxina anterior, a rapaza pode supoñer que as 12 semanas lectivas dun trimestre serán aproximadamente iguais e, así,
2.7 obter a matriz de dedicación trimestral multiplicando por 12 a matriz de dedicación semanal.

2.8

Producto dunha matriz fila por unha matriz columna

NOTA

Esta definición é válida para o producto dun vector fila por un vector columna, pero non ó contrario.

O **producto dun vector fila por un vector columna**, ambos da mesma dimensión, é un número que se obtén multiplicándoos termo a termo e sumando os resultados:

2.9

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n$$

Producto de matrices

Para que dúas **matrices** A e B se poidan **multiplicar**, $A \cdot B$, é necesario que *o número de columnas da primeira coincida co número de filas da segunda.*

En tal caso, o **producto** $A \cdot B = C$ é outra matriz os elementos da
2.10 cal se obteñen multiplicando cada vector fila da primeira por cada vector columna da segunda, do seguinte xeito:

$$\left.\begin{array}{l} A = (a_{ik})_{m,n} \\ B = (b_{kj})_{n,p} \end{array}\right\} A \cdot B = C = (c_{ij})_{m,p}$$

sendo c_{ij} o producto da fila i de A pola columna j de B:

$$c_{ij} = (a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \ldots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

A matriz C resultante ten tantas filas como A, m, e tantas columnas como B, p.

MOI IMPORTANTE

O producto de matrices $A \cdot B$ pode realizarse se os vectores de cada fila de A son da mesma dimensión cós vectores de cada columna de B.

$$\begin{array}{ccc} A \cdot B & = & C \\ (m, n)\ (n, p) & & (m, p) \end{array}$$

Observa nestes exemplos a mecánica do producto de matrices:

$$\textbf{1.} \underset{(2\times 3)}{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}} \underset{(3\times 2)}{\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2\cdot1 + 3\cdot7 + 5\cdot0 & 2\cdot6 + 3\cdot2 + 5(-5) \\ 7\cdot1 + 2\cdot7 + 4\cdot0 & 7\cdot6 + 2\cdot2 + 4(-5) \end{pmatrix} = \underset{(2\times 2)}{\begin{pmatrix} 23 & -7 \\ 21 & 26 \end{pmatrix}}$$

2.11

2.12	**VECTOR COLUMNA POR VECTOR FILA** $C=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\\0\end{pmatrix}$ $F=(5\ \ 1\ \ 4\ \ 2)$ Observa que $C\cdot F$ é unha matriz 4×4. Calcúlaa.	**2.** A: Consumos anuais de tres familias α, β, γ, de pan, carne e manteiga. B: Prezos do pan, carne e manteiga nos anos 98, 99, 00 e 01. $\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc}\text{PAN} & \text{CARNE} & \text{MANT.}\end{array} \\ \begin{array}{c}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{array} & \begin{pmatrix}430 & 157 & 8\\ 545 & 210 & 1\\ 120 & 80 & 3\end{pmatrix}\end{array}$ $\boxed{A_{3,3}}$ $\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc}98 & 99 & 00 & 01\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{PAN}\\ \text{CARNE}\\ \text{MANT.}\end{array} & \begin{pmatrix}145 & 156 & 171 & 180\\ 1300 & 1300 & 1350 & 1400\\ 1500 & 1630 & 1600 & 1800\end{pmatrix}\end{array}$ $\boxed{B_{3,4}}$. A matriz $A\cdot B$ danos o gasto anual de cada familia no total dos catro productos. $A\cdot B=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc}98 & 99 & 00 & 01\end{array} \\ \begin{array}{c}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{array} & \begin{pmatrix}278\,450 & 284\,220 & 298\,280 & 311\,600\\ 353\,525 & 359\,650 & 378\,295 & 393\,900\\ 125\,900 & 127\,610 & 133\,320 & 139\,000\end{pmatrix}\end{array}$

<u>Componentes y unidades elementales.</u>

- *Lenguaje*:
  - Términos y expresiones. "Cada operación tiene sus peculiaridades y su interpretación".
  - Notaciones: $(a_{ij})_{m,n} + (b_{ij})_{m,n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m,n}$ $\quad k\cdot(a_{ij})_{m,n}$, $\quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$
- *Situaciones*: ejemplos de operaciones realizadas con matrices, ejemplos de aplicaciones de las operaciones con matrices.
- *Procedimientos / Técnicas*: suma de matrices, producto de un número por una matriz, producto de matrices.

-*Conceptos*: definición de las operaciones con matrices.

- *Propiedades:* 1) Para que dos matrices se puedan sumar es necesario que tengan la misma dimensión. 2) Para que dos matrices A y B se puedan multiplicar, AB, es necesario que el número de columnas de la primera coincida con el número de filas de la segunda. 3) La definición del producto de un vector fila por un vector columna no es válida en caso contrario.

-*Argumentos:* En realidad no se justifican las definiciones ni las técnicas. Sólo se ponen ejemplos de cómo usar las técnicas.

<u>Conflictos semióticos potenciales.</u>

2.1 Las afirmaciones que se hacen son muy confusas (no siempre se pueden sumar o multiplicar matrices cualesquiera), además expresiones del tipo *tienen sus pecularida-*

des y su interpretación, no resultan demasiado pertinentes, pues no se indica en qué pueden consistir esas peculiaridades o interpretaciones.

2.2 Se introduce la suma teóricamente: $(a_{ij})_{m,n}+(b_{ij})_{m,n} = (a_{ij}+b_{ij})_{m,n}$. Esta notación tiene un carácter genérico. Aunque se menciona que dicha operación se realiza término a término no se deduce cómo hacerla según esta notación. Esto origina, potencialmente, un conflicto semiótico.

2.3 Se utiliza una notación genérica similar a la usada en 2.2: $k\cdot(a_{ij})_{m,n} = (ka_{ij})_{m,n}$, y se indica que se multiplica por ese número cada término de la matriz. En cuanto a la letra k, que simboliza un número, no se indica qué tipo de número es.

2.4 Ejemplo en el que se cita una suma de matrices, aunque sólo se presenta el resultado final, por lo que queda sin aclarar la técnica, ya que no se aborda, en la práctica que significa $a_{ij}+b_{ij}$

2.5 Se muestra un ejemplo de dos matrices que no pueden sumarse, para intentar justificar la propiedad 1). Este ejemplo, junto con el anterior, ilustra una situación relacionada con la notación $(a_{ij})_{m,n}+(b_{ij})_{m,n} = (a_{ij}+b_{ij})_{m,n}$

2.6 Se pone un ejemplo de una situación práctica donde se aplicaría una suma de matrices.

2.7 Se presenta un ejemplo del producto de un número por una matriz, pero sin pasos intermedios, al igual que se hace en 2.4

2.8 Se da un ejemplo de aplicación del producto por un número, utilizando un ejemplo del apartado 1. Esta situación, junto con la presentada en 2.6, permiten contextualizar los conocimientos pretendidos para poder aplicarlos posteriormente a situaciones relacionadas (Godino, Bencomo, Font y Wilhemi, 2006)

2.9 Se describe la técnica para multiplicar un vector fila por un vector columna. Además aparecen los términos "matriz fila" y "matriz columna", aunque no se definen. Por el título del apartado y la definición el alumno ha de deducir que matriz fila y matriz columna son lo mismo que vector fila y vector columna.

2.10 Se da la definición de producto de matrices de manera genérica. Además, se enuncia una condición (propiedad 2) para que este producto se pueda realizar. Aparece un símbolo nuevo: $\sum$ (sumatorio), cuyo significado parece quedar justificado por la suma de términos que aparece a su izquierda.

2.11 Se muestra una situación particular del producto de matrices. En este caso se justifica la obtención de cada término del producto, es decir, se muestran los pasos intermedios, no sólo el resultado final. Además se plantea al alumno (como tarea) determinar el producto de un vector columna por un vector fila, lo que origina una matriz y no un número como en el producto contrario.

2.12 Tenemos un ejemplo práctico de aplicación del producto de matrices.

Lo incluido en este apartado son procesos, técnicas operatorias y notaciones simbólicas cuya justificación se basa en ejemplos concretos. Esta sección presenta al alumno las operaciones principales que manejará a lo largo de toda la unidad didáctica y que serán de vital importancia para resolver todas las actividades que se presentarán en el estudio del Álgebra Lineal. De hecho, Rodríguez (1999) afirma que la mayoría de las actividades del aula cuando se estudian matrices son únicamente operaciones.

<u>Componentes sistémicos.</u>

1- *Lenguaje*: Encontramos ambigua el hecho de que *cada operación tenga sus peculiaridades y su interpretación*. ¿Cuál es la interpretación a la que se refiere? Cuando en el aula de matemáticas se utiliza la palabra *interpretación*, solemos referirnos a un contexto geométrico, pero este no es el uso con el que se utiliza aquí. Por otro lado, las notaciones que encontramos en este apartado presentan una formalidad con la que puede ser que el alumno no esté familiarizado pero que es necesaria en un curso de preparación para los estudios universitarios.

2- *Situaciones*: En este caso son ejemplos que sirven para ilustrar las operaciones presentadas. El significado institucional que se le da a estas operaciones es, por tanto, de carácter operatorio.

3- *Procedimientos*: Se introducen las tres operaciones que se pueden realizar con matrices, pero no se comenta que sólo se pueden realizar estas tres. No aparece la resta de matrices como operación ni como caso particular de la suma. Tampoco se menciona la división, quedando la duda de si es que no existe o no se estudia en ese curso. Las operaciones se presentan con una breve explicación de cuándo se pueden realizar y/o cómo, su definición teórica y un ejemplo de la misma. No se relacionan estos nuevos procedimientos con ninguna situación-problema fuera del contexto matemático.

4- *Conceptos*: Tal y como se presentan las operaciones, el significado institucional que tendrán estas no se corresponderá con el significado personal construido por los alumnos, para los que, en vez de un concepto matemático, sólo serán una técnicas para resolver rutinas.

5- *Propiedades*: La primera propiedad no presenta ninguna explicación, pero en Ferro (2004, pag. 27) se observa que, por regla general, el alumno considera natural que las matrices se sumen elemento a elemento, por lo que esta propiedad la asimilarán sin dificultades. Las otras dos no resultan tan obvias, pero el manual tampoco ofrece ninguna explicación sobre ellas.

3. Propiedades de las operaciones con matrices.

Texto y unidades primarias de análisis.

2.3 PROPIEDADES DAS OPERACIÓNS CON MATRICES

3.1 As operacións con matrices teñen unhas propiedades que lles confiren unha estructura interesante. Vexámolas.

3.2 **Propiedades da suma de matrices**

As matrices de dimensión $m \times n$ poden sumarse, e o resultado é outra matriz $m \times n$. Ademais, a suma cumpre as seguintes propiedades:

1. Asociativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$

2. Conmutativa: $A + B = B + A$

3. Elemento neutro: A matriz $\mathbf{0}_{m,n}$, na que os seus elementos son todos 0, sumada con calquera outra matriz de dimensión $m \times n$, déixaa igual, é dicir, $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$.

DECÁTATE

A propiedade asociativa permítenos suprimir parénteses:

$$(A + B) + C = A + B + C$$

3.3 **4. Toda matriz, A, ten unha oposta, $-A$:** A oposta de $A = (a_{ij})$ é $-A = (-a_{ij})$, pois $(a_{ij}) + (-a_{ij}) = (a_{ij} - a_{ij}) = (0) = \mathbf{0}$.

Por exemplo, a matriz oposta de $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ é $\begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,

porque: $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Estas catro propiedades resúmense dicindo que o conxunto $M_{m,n}$ das matrices de dimensión $m \times n$ é un **grupo abeliano** respecto da suma.

NOMENCLATURA

Chámaselle **grupo abeliano** a un conxunto entre os elementos do cal hai definida unha operación que cumpre as propiedades:

- Asociativa.
- Conmutativa.
- Elemento neutro.
- Elemento oposto.

Propiedades do producto de números por matrices

Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}$, cúmprense as seguintes propiedades:

1. $a \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A$

2. $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$

3. $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$

4. $1 \cdot A = A$

3.4	**MOI IMPORTANTE** Nas matrices, en xeral $A \cdot B$ **non é igual** que $B \cdot A$. $A \cdot B \neq B \cdot A$ **Propiedades do producto de matrices** **1. Asociativa**: $(A_{m,n} \cdot B_{n,p}) \cdot C_{p,q} = A_{m,n} \cdot (B_{n,p} \cdot C_{p,q})$ Esta propiedade permítenos prescindir de parénteses cando multipliquemos varias matrices (sempre que, polas súas dimensións, cada unha sexa *multiplicable* pola seguinte). **2.** O producto de matrices **non é conmutativo**. Como consecuencia, temos que manter a orde en que aparezan as matrices que se han de multiplicar. Polo tanto, utilizaremos expresións do seguinte tipo: "A matriz M está multiplicada *pola esquerda* (ou *pola dereita*) pola matriz A".
3.5	**Propiedades distributivas** Se A, B, C, D son matrices, cunhas dimensións que permiten efectuar as operacións que se indican, cúmprense as seguintes propiedades: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \qquad (B + C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$

Componentes y unidades elementales.

- *Lenguaje*:
  - Términos y expresiones: asociativa, conmutativa, elemento neutro, opuesta, grupo abeliano, propiedades distributivas.
  - *Notaciones*: $0_{m,n}$, $M_{m,n}$
- *Situaciones*: ejemplo de la opuesta de una matriz.
- *Propiedades*:
  a) suma de matrices: asociativa, conmutativa, elemento neutro, matriz opuesta;
  b) producto de una matriz por un número: a·(b·A) = (ab)·A , (a+b)·A = a·A+b·A , 1·A = A ;
  c) producto de matrices: asociativa, no conmutativo; propiedades distributivas.

-*Argumentos*: No hay justificación alguna de las múltiples propiedades enunciadas, excepto para la matriz opuesta, ni siquiera mediante ejemplos. Se consideran significados transparentes o ejercicios triviales para los estudiantes.

Conflictos semióticos potenciales.

3.1. Se afirma que las propiedades de las operaciones con matrices le confieren *una estructura interesante*, opinión que no consideramos relevante para un estudiante, en este momento de estudio. ¿Interesante?, ¿por qué?

3.2 Se formulan las propiedades de la suma de matrices; se fija la notación genérica para el elemento neutro de la suma. Aunque estas propiedades coinciden con las de la suma de números reales, no se relacionan ambos objetos, llamándose además $0_{m,n}$ a la matriz formada por ceros y matriz opuesta de A a la formada por los opuestos de los elementos de A. Se supone que el lector llegará a comprender por sí solo estas propiedades sin necesidad de ninguna justificación. Sin embargo, autores como Dorier y Sierpinska (2001) o Dorier, Robert, Robinet y Roglaski (2000) afirman que enseñar Álgebra Lineal equivale a unificar y generalizar conceptos asociados a elementos que el alumno ya conocía de enseñanzas anteriores, identificando características comunes, por lo que sería de gran ayuda para evitar conflictos semióticos establecer la relación entre las propiedades de la suma de matrices y las de la suma de números reales, ya conocidas. Además, se da una definición muy precaria de grupo abeliano, estructura que se "deja caer" sin significado para el estudiante.

3.3 Se dan las propiedades del producto de números por matrices, sin poner ningún ejemplo comprobatorio de las mismas.

3.4. Se dan las propiedades del producto de matrices señalando (en el caso de la propiedad asociativa): *siempre que, por sus dimensiones, cada una sea multiplicable por la siguiente*, de nuevo sin justificación alguna ni ejemplo que apoye dicha afirmación

3.5 Se introducen las propiedades distributivas sin comentar que no se incluyen con ninguna de las operaciones anteriores porque relacionan dos operaciones diferentes: suma y producto de matrices. De hecho en otros manuales en vez de "propiedades distributivas" se les llama "propiedad distributiva del producto respecto a la suma".

En este apartado las situaciones o tareas que ejemplifiquen las propiedades introducidas aparecen en los "ejercicios resueltos" y "propuestos".

<u>Componentes sistémicos</u>

1- *Lenguaje*: El lenguaje utilizado es una muestra representativa de las notaciones más habituales con matrices. En algún caso, como en el de la matriz opuesta, estas notaciones se completan con un ejemplo concreto. Las notaciones utilizadas tienen sobre todo una función representacional, no instrumental, ya que sólo nos dicen cómo se comportan estas operaciones, no cómo se realizan, cuestión aclarada en el apartado anterior. Alguna de las notaciones pueden generar un conflicto para el alumnado: la notación $\mathbf{0}_{\mathbf{m,n}}$ es simplificada, escribiéndose únicamente **0;** por otro lado, al hablar de las propiedades del producto de matrices, se escribe $A_{m,n}$ para referirse a una matriz de dimensión m×n, notación no utilizada hasta ese momento.

2- *Situaciones*: Sólo encontramos un ejemplo concreto al hablar de la opuesta de una matriz.

3- *Conceptos*: Nos encontramos con el concepto de elemento neutro y opuesto, que ya deberían haber sido trabajado por los estudiantes de este curso. Además se introduce el concepto de grupo abeliano pero no se relaciona el grupo abeliano de las matrices con ningún otro que los alumnos ya conocen en un curso previo a la universidad, aunque nunca hayan utilizado ese nombre.

4- *Propiedades*: Las propiedades presentadas están adaptadas al nivel del marco institucional en el que nos encontramos. Sin embargo, el aprendizaje matemático ha de ser una actividad constructiva, no receptiva (Schoenfeld, 1992) y se echan en falta ejemplos y situaciones que lleven al alumno a descubrir estas propiedades por sí mismo.

5- *Argumentos*: Godino, Wilhemi, Font y Bencomo (2006) señalan que todas las reglas presentadas a los estudiantes han de ser explicadas y justificadas mediante argumentos representativos y adaptados. El texto analizado no presenta ninguna explicación que justifique las propiedades presentadas, lo que puede ocasionar un conflicto para los estudiantes que les lleve a ver estas propiedades como algo que simplemente han de memorizar pero que nos les puede ayudar a resolver una situación-problema. Estas propiedades serán utilizadas como herramientas implícitas.

4. Matrices cuadradas.

<u>Texto y unidades primarias de análisis.</u>

4.1	**2.4 MATRICES CADRADAS** As matrices cadradas dunha certa orde, $\mathcal{M}_{n,n}$, ademais de sumarse e multiplicarse por números, poden multiplicarse entre si. Estas operacións cumpren todas as propiedades estudiadas ata agora e algunhas outras.
4.2	**Matriz unidade** NOMENCLATURA Á matriz unidade chámaselle tamén **matriz identidade**. $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ Os termos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ dunha matriz cadrada $(a_{ij})_{n,n}$ forman o que se chama a **diagonal principal**. Pois a matriz I_n, cuns termos que son todos 0 agás os da diagonal principal, que son 1, ten a seguinte propiedade: Calquera que sexa $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$. Por iso, dicimos que I_n é a matriz unidade. Por exemplo: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$, $A \cdot I_3 = I_3 \cdot A = A$

4.3

Matriz inversa doutra

NOMENCLATURA

As matrices que teñen inversa chámanse **regulares**.

Posto que no conxunto $\mathcal{M}_{n,n}$ está definida a multiplicación (é dicir, o producto de dúas matrices cadradas de orde n é outra matriz cadrada de orde n), e ademais existe matriz unidade, parece obrigado facerse a seguinte pregunta: *¿toda matriz cadrada ten inversa?* É dicir, dada unha matriz cadrada, A, ¿existe outra, A^{-1}, tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$? Por exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{pois } A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A resposta á pregunta anterior é negativa. Algunhas matrices cadradas teñen inversa, pero outras non. Na unidade 4 aprenderemos a identificar qué matrices teñen inversa e a obtela con comodidade.

4.4

Compendio das propiedades das operacións en $\mathcal{M}_{n,n}$

No conxunto, $\mathcal{M}_{n,n}$, das matrices cadradas dunha certa orde, n, hai dúas **operacións internas** (a **suma** e o **producto** de dúas matrices cadradas de orde n é outra matriz cadrada da mesma orde) e unha **operación externa** (o **producto dun número real por unha matriz cadrada** é unha matriz cadrada da mesma orde).

Estas operacións teñen as seguintes propiedades:

4.5

PROPIEDADES DAS OPERACIÓNS INTERNAS

Sexan A, B, C, I matrices cadradas da mesma orde.

OPERACIÓN INTERNA

Chámanse operacións **internas** porque se operan entre si elementos do conxunto $\mathcal{M}_{n,n}$ (matrices) e o resultado tamén é un elemento de $\mathcal{M}_{n,n}$.

	SUMA	PRODUCTO
Asociativa	$(A + B) + C = A + (B + C)$	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
Conmutativa	$A + B = B + A$	non
Elemento neutro	$\mathbf{0}$; $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$	I; $A \cdot I = I \cdot A = A$
Elemento simétrico	oposto de A é $-A$	algunhas matrices teñen inversa, A^{-1}
Distributivas	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$	

Gracias a estas propiedades poderemos resolver ecuacións do tipo $AX + B = C$, sendo A, B, C matrices de orde $n \times n$ coñecidas e X a matriz incógnita. A matriz A debe ter inversa:

$$AX + B = C \rightarrow AX = C - B \rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}(C - B) \rightarrow X = A^{-1}(C - B)$$

4.6

PROPIEDADES DA OPERACIÓN EXTERNA

Sexan A, B matrices e a, b números reais.

Asociativa	$(a \cdot b) \cdot A = a \cdot (b \cdot A)$
Distributivas	$(a + b) \cdot A = a \cdot A \cdot + b \cdot A$ $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$
Unidade	$1 \cdot A = A$

Componentes y unidades elementales.

- *Situaciones*: ejemplo de matriz unidad y matriz inversa.
- *Lenguaje*:
  - Términos y expresiones: matriz unidad, diagonal principal, matriz inversa, operación interna, operación externa, elemento simétrico.
  - Notaciones: I_n, A^{-1}
- *Conceptos*: matriz unidad, diagonal principal, matriz inversa.
- *Propiedades*: cualquiera que sea $A \in M_{n,n}$, $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$; propiedades de las operaciones internas, propiedades de la operación externa.
- *Argumentos*: Quizás lo que hay que destacar es precisamente la ausencia de argumentos, aunque se presentan diversas propiedades. No se discute el porqué de $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$, ni siquiera con un ejemplo, ni tampoco se justifica ninguna de las propiedades de las operaciones. Tampoco se explica con claridad qué es una operación interna ni externa (tan solo se hace una referencia con una nota al margen) y por qué las operaciones presentadas (suma de matrices y producto de una matriz por un número) tienen esta característica.

Conflictos semióticos potenciales.

4.1 Se introduce al lector el contenido de este apartado, afirmando que "las matrices cuadradas cumplen todas las propiedades anteriores y *algunas otras*", lo que podría provocar la atención, pero también la sorpresa del alumno: ¿cuáles otras?

4.2 Se introduce la matriz unidad, I_n, presentando como ejemplo I_n e I_3, y explicando que es una matriz cuyos términos son todos 0 excepto los de la diagonal principal, que son 1. Además se define la diagonal principal, en una mezclolanza de nociones y sin poner ningún ejemplo (en ningún momento se define la diagonal secundaria). Esto puede resultar difícil si los estudiantes no manejan con soltura la notación de los términos de una matriz utilizando índices y puede provocar conflictos semióticos. El ejemplo que se propone para apoyar el concepto de matriz unidad resulta extraño (o innecesario): se dan las matrices A e I_3 y, en lugar de hacer su producto, se afirma que $A\ I_3 = I_3\ A = A$, lo que es redundante con la propiedad general enunciada previamente.

4.3 Se requiere que el alumno reflexione sobre si una matriz cuadrada tiene o no inversa. En este momento, el estudiante no tiene herramientas suficientes para contestar a esta pregunta. El propio libro contesta negativamente, pero sin dar ninguna razón e indicando que esto se resolverá en la unidad siguiente. Además, la introducción previa al concepto de matriz inversa de una matriz cuadrada resulta muy curiosa: *parece obligado* *hacerse la pregunta ¿toda matriz cuadrada tiene inversa?*;"obligado", ¿para quién? ¿Para quién todavía desconoce lo que es el objeto matriz inversa y sus aplicaciones? ¿Ciencia infusa? Los conflictos semióticos aquí resultan evidentes: no hay conexión entre expresión y contenido.

4.4 Se clasifican las operaciones estudiadas en el punto 2 en internas y externas, pero sin razonar el porqué de estos nombres, sobre todo el de operación externa.

4.5 Se resumen las propiedades estudiadas en el punto 3, añadiendo el elemento neutro de la multiplicación. Aparece el término *elemento simétrico*, utilizando la palabra *opuesto* en el caso de la suma e *inverso* en el caso de la multiplicación. No se da ninguna razón que justifique el uso de estos nombres. Además la propiedad distributiva aparece común para la suma y el producto, cuando en el apartado anterior se exponía aparte. Señalar también que en el apartado 3 la matriz cero se denotaba $0_{m,n}$ y ahora se denota $\mathbf{0}$. Por último se indica que con estas propiedades se pueden resolver ecuaciones del tipo AX+B = C, aunque en este momento el alumno no las puede resolver por no conocer las técnicas para calcular la matriz inversa. Es como si hubiera prisa, por parte de los autores, de anticipar objetos extraños para el estudiante, con la disculpa de que más tarde se intentará darles sentido.

4.6 Se presentan de nuevo las propiedades dadas en 3, pero dando nombre a cada una de ellas. En lo que respecta a las propiedades de las operaciones externas, resultan extraños estos nombres. Por ejemplo, en la primera, denominada *asociativa*, las operaciones no son del mismo tipo: en $(a.b).A = a.(b.A)$, $a.b$ representa el producto de dos números reales y $b.A$ representa el producto de un número real por una matriz. La confusión generada por este abuso de lenguaje puede originar conflictos semióticos importantes.

<u>Componentes sistémicos</u>

1- *Lenguaje*: Se intenta utilizar un lenguaje cercano al estudiante sin abusar de una excesiva notación matemática (lo que Hillel [2000] llama *lenguaje algebraico*), aunque alguna de las expresiones, como por ejemplo la introducción al apartado donde se habla de las propiedades de las matrices cuadradas, puede resultar muy confuso. Se echan en falta recursos expresivos a la hora de definir la diagonal principal de una matriz cuadrada y la manera de definir matriz inversa puede provocar un conflicto en el alumnado, ya que puede ser que no vea una definición en esa forma de expresarse.

2- *Situaciones*: Sólo encontramos dos situaciones algebraicas: un ejemplo de matriz unidad y otro de matriz inversa. No hay ningún problema ni aplicación a partir de la cual emerjan conceptos matemáticos.
3- *Conceptos*: Hay un intento de contextualizar los elementos conceptuales mediante ejemplos. Es problemático el concepto de diagonal principal al no disponer de situaciones que lo clarifiquen y no aparece el concepto de diagonal secundaria cuando podría resultar natural para el alumnado asimilarlos a la vez.
4- *Propiedades*: La forma de presentar las propiedades da pie a un aprendizaje memorístico. Además, el alumno puede confundir, comparando lo dicho sobre matriz unidad y matriz inversa, *propiedad* con *definición,* lo que constituye un posible conflicto semiótico.
5- *Argumentos*: Destaca la falta de argumentaciones al introducir los conceptos o propiedades y las pocas que hay son informales, por ejemplo al explicar qué es la matriz inversa de otra. Se sobreentiende que el alumno entiende ciertas afirmaciones como que las matrices cuadradas de orden n pueden multiplicarse entre sí o las definiciones elemento neutro o inverso. No se utilizan razonamientos por analogía al presentar las propiedades de las operaciones, lo que hubiera supuesto que el estudiante relacionara estos nuevos objetos matemáticos con otros ya estudiados en cursos anteriores.

5. Complementos teóricos para el estudio de matrices.

<u>Texto y unidades primarias de análisis</u>

5.1 **2.5 COMPLEMENTOS TEÓRICOS PARA O ESTUDIO DE MATRICES**

No próximo apartado estudiaremos a idea de "rango dunha matriz". Para iso necesitamos os seguintes complementos teóricos.

5.2 **Espacios vectoriais**

A idea de **vector** como frecha dá lugar á de **espacio vectorial**: conxunto de todos os vectores entre os cales se definen unhas operacións que cumpren certas propiedades. Pero hai outros entes matemáticos coas mesmas operacións e propiedades. Por iso, a definición de espacio vectorial é moito máis ampla e aberta que unha colección de "frechas".

5.3 Temos un conxunto, V, entre os elementos do cal (ós que lles chamaremos vectores) hai definidas dúas operacións:

SUMA DE DOUS ELEMENTOS DE V: se $\vec{u}$, $\vec{v} \in V$, daquela $\vec{u} + \vec{v} \in V$

PRODUCTO POR UN NÚMERO REAL: se $a \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \in V$, daquela $a \cdot \vec{u} \in V$

Dise que $(V, +, \cdot)$ é un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ se as operacións cumpren as seguintes propiedades:

O ESPACIO VECTORIAL $\mathcal{M}_{m,n}$

O conxunto $\mathcal{M}_{m,n}$ das matrices de dimensión $m \times n$ é un espacio vectorial, pois, segundo vimos na páxina 59, cumpren todas estas propiedades.

SUMA DE VECTORES	
ASOCIATIVA	$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
CONMUTATIVA	$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
VECTOR NULO	É un vector chamado $\vec{0}$ tal que se $\vec{v} \in V$ cumpre: $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
VECTOR OPOSTO	Todo $\vec{v}$ ten un oposto, $-\vec{v}$: $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

PRODUCTO DUN NÚMERO POR UN VECTOR	
ASOCIATIVA	$(a \cdot b) \cdot \vec{v} = a \cdot (b \cdot \vec{v})$
DISTRIBUTIVA I	$(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$
DISTRIBUTIVA II	$a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$
PRODUCTO POR 1	Se $\vec{v} \in V$ cúmprese que $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

EXEMPLOS

$\mathbb{R}^2$ é o conxunto de todos os pares de números reais. Por exemplo: (3, 7), (2/3, 0)

$\mathbb{R}^3$ é o conxunto de todos os ternos. Por exemplo: $(7, -1, \sqrt{2})$, (0, 0, 0)

$\mathbb{R}^4$ é o conxunto de cuaternas. Por exemplo: (4, –1, 0, 6), (3, 2/5, –7, 4)

n-uplas de números reais

5.4 Unha colección de n números reais dados nunha certa orde chámase unha ***n*-upla**. O conxunto de todas as n-uplas de números reais forman un espacio vectorial, e desígnase $\mathbb{R}^n$. Imos prestarlles atención porque tanto as filas coma as columnas das matrices son n-uplas de números reais. Unha n-upla de dous elementos chámase "par", unha de tres chámase "terno" e de catro, "cuaterna".

5.5 **Combinación lineal de vectores**

Dados $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n \in V$ e $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, ó vector formado do seguinte xeito:

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 + \ldots + a_n\vec{v}_n$$

chámaselle **combinación lineal** dos vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$.

Por exemplo, calculemos unha combinación lineal de varias cuaternas:

$$3(-2, 5, 8, 4) + 2(1, 7, 3, -1) - 4(0, 5, -1, -2) =$$
$$= (-6, 15, 24, 12) + (2, 14, 6, -2) + (0, -20, 4, 8) = (-4, 9, 34, 18)$$

Polo tanto, a cuaterna (–4, 9, 34, 18) é combinación lineal de:

(–2, 5, 8, 4), (1, 7, 3, –1), (0, 5, –1, –2)

5.6

NÚMERO DE N-UPLAS L.I.

O máximo número posible de *n*-uplas L.I. é *n*. É dicir:

- Dous *pares* poden ser L.I., pero tres pares son, con seguridade, L.D.
- Tres *ternos* poden ser L.I., pero catro ternos son, con seguridade, L.D.
- Etcétera.

DEPENDENCIA LINEAL DE $\vec{0}$

Un único vector $\vec{v}$ distinto de $\vec{0}$ é L.I., pois $a\vec{v} = \vec{0}$ só é certo se $a = 0$.

O vector $\vec{0}$ é L.D., pois, por exemplo,

$$7 \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

é dicir, pódese obter $\vec{0}$ multiplicando $\vec{0}$ por un número distinto de 0.

Dependencia e independencia lineal

Un conxunto $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$ de elementos de V dise que son **linealmente dependentes** (L.D.) se algún deles se pode pór como combinación lineal dos demais.

Un conxunto $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_n$ de elementos de V dise que son **linealmente independentes** (L.I.) se ningún deles se pode pór como combinación lineal dos demais.

Por exemplo, as catro cuaternas (–4, 9, 34, 18), (–2, 5, 8, 4), (1, 7, 3, –1), (0, 5, –1, –2) son linealmente dependentes, xa que, segundo vimos máis arriba, a primeira delas é combinación das demais.

A cuaterna (0, 0, 0, 0) é combinación lineal de calquera conxunto de cuaternas, pois obtense sumando o resultado de multiplicar cada unha delas por 0.

As cuaternas (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) son linealmente independentes, pois ningunha delas se pode pór como combinación lineal das demais. É evidente.

Agás nalgúns casos nos que resulta evidente a dependencia ou independencia lineal de varios vectores, o recurso máis seguro para pescudalo é a aplicación da seguinte propiedade:

5.7

PROPIEDADE FUNDAMENTAL

A condición necesaria e suficiente para que os vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ sexan linealmente independentes, é que a igualdade

$$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3 + \ldots + x_n\vec{u}_n = 0 \quad (*)$$

só sexa certa cando todos os números son ceros:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$$

É dicir, se os vectores son L.D., existen números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ non todos nulos para os cales se cumpre a igualdade (*), mentres que se os vectores son L.I., a única combinación lineal deles que dá como resultado o vector $\vec{0}$ é $0\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 + 0\vec{u}_3 + \ldots + 0\vec{u}_n$.

<u>Componentes y unidades elementales</u>

- *Situaciones*: Ejemplo de combinación lineal.
- *Lenguaje*:
  - Términos y expresiones: rango de una matriz, espacio vectorial, flecha, n-uplas de números reales, par, terna, cuaterna, combinación lineal, vectores linealmente dependientes, vectores linealmente independientes.
  - Notaciones: $\vec{u}, \vec{v}$, (V,+,·), R^n.
- *Conceptos*: espacio vectorial, n-uplas de números reales, combinación lineal de vectores, dependencia e independencia lineal.

- *Propiedades*: Propiedad fundamental: la condición necesaria y suficiente para que los vectores $\vec{u}_1,...,\vec{u}_n$ sean linealmente independientes, es que la igualdad $x_1\vec{u}_1+...+x_n\vec{u}_n=0$ sólo sea cierta cuando todos los números son 0.

-*Argumentos*: No se prueba esta propiedad y sólo se pone un ejemplo concreto de combinación lineal.

Conflictos semióticos potenciales.

5.1 Se da una justificación extraña para el estudiante, que no conoce el papel del rango de una matriz (noción que contiene muchos objetos matemáticos nuevos), de porqué son necesarios, en este momento, estos complementos teóricos.

5.2 Se da una definición informal de espacio vectorial. El párrafo comienza con una frase bastante ambigua: "la idea de vector como flecha". El alumno ha estudiado el curso anterior los vectores, pero no hubiera estado de más recordar su definición. Hillel (2000) sostiene que para evitar conflictos en el estudiante hay que dejar de enseñar una teoría axiomática, ya que gran parte de las situaciones que ha de resolver un estudiante de este nivel e, incluso del primer año universitario, pueden resolverse sin usar esta teoría.

5.3 Se da una definición formal de espacio vectorial. Se dice que V es un conjunto a cuyos elementos se les llamará vectores. Como nota al margen se hace ver al alumno que las propiedades de la operaciones con estos elementos coinciden con las propiedades de las operaciones con matrices, por lo que $M_{m,n}$ es un espacio vectorial. Por la exposición del texto puede producirse un conflicto semiótico: si los elementos del espacio vectorial son vectores y $M_{m,n}$ es un espacio vectorial, ¿las matrices son vectores? El conflicto vendrá de la idea que el alumno tiene de vector en el plano, lo cual a priori no tiene ninguna relación con las matrices. Además, en el currículo de Secundaria, tanto Obligatoria como Postobligatoria, no se contempla en ningún momento el estudio de las diferentes estructuras algebraicas y su utilidad, por lo que es difícil que el alumno relacione por sí solo las matrices con otros espacios vectoriales. De nuevo, dentro del cuadro *producto de un número por un vector* se abusa del lenguaje cuando se llama, por ejemplo, propiedad asociativa, a una igualdad donde intervienen operaciones que no son de la misma naturaleza. La forma de introducir el espacio vectorial no aprovecha los conocimientos previos de los estudiantes. Hillel y Sieprinska (1994) recalcan la importancia de construir estructuras conceptuales donde antes había objetos individuales. Por ese motivo hubiera sido de ayuda para el alumnado utilizar espacios vectoriales ya conocidos por haber trabajado con ellos en cursos anteriores, aunque nunca se hubiera usado la denominación de espacio vectorial.

5.4 Se menciona que el conjunto de n-uplas de números reales forman un espacio vectorial. Esto puede generar un conflicto ya que en principio el alumno sólo conoce los elementos de R^2, y tiene que suponer que las operaciones con ternas, cuaternas, etc, se realizan de la misma forma. Además, los estudiantes identifican R^2 con el plano y podrían identificar R^3 con el espacio pero, ¿qué es R^4? ¿Y R^n?

5.5 Se define combinación lineal, presentando un discurso teórico y una praxis, nuevos para el alumno, sin apoyo visual concreto (muy fácil de realizar en el plano).

5.6 No aparece ninguna relación de la dependencia e independencia con el lenguaje ordinario. Además no se dan justificaciones de las afirmaciones del párrafo "NÚMERO DE N-UPLAS L.I."

5.7 Se establece una propiedad fundamental para estudiar la independencia de vectores, pero sin dar ninguna razón de porqué se cumple. Se utilizan las letras $x_1,\dots,x_n$ para indicar números, poniendo en juego notaciones alternativas de las variables que puede resultar conveniente pero, a la vez, conflictivo (hasta ahora se utilizaban $a_1,\dots,a_n$ para representar números reales). Las dificultades de comprensión son elevadas. Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (1999, pág 108) señalan que: " *..cualquier persona que ha enseñado un curso básico de algebra lineal conoce las dificultades de los estudiantes para comprender la definición formal de independencia lineal y su aplicación a contextos variados. Además varios estudiantes tienen habilidades para testear si un conjunto de vectores, polinomios o funciones son independientes, pero no son competentes para usar el concepto ded independencia lineal en contextos formales..[…] A la pregunta "Sean U, V y W, tres vectores de* $\mathbf{R^3}$*, y f un operador lineal en* $\mathbf{R^3}$*. Si f(U), f(V), f(W) son independientes, ¿son independientes U,V y W?". Esta cuestión generalmente excede las posibilidades de respuesta de los principantes. Concluimos que la mayor dificultad está relacionada con el uso de implicaciones lógicas y la confusión entre hipótesis y conclusión..".*

Componentes sistémicos

1- *Lenguaje*: Se combina un lenguaje informal con una cierta formalidad en las notaciones utilizadas. Los términos y expresiones usados son, en su mayoría, nuevos para el alumnado y quizás sea conflictivo introducir tantos a la vez. También son novedosas las notaciones excepto la de los vectores, estudiados el curso anterior. Puede resultar difícil para los estudiantes relacionar el tema de vectores ya estudiado con estos nuevos objetos matemáticos.

2- *Situaciones*: La formalidad de los conceptos introducidos no da pie a plantear situaciones-problema representativas de lo estudiado. Sólo encontramos un ejemplo de combinación lineal.

3- *Conceptos*: Se presentan conceptos bastante abstractos para un alumnado acostumbrado a prescindir de una excesiva formalidad en las definiciones matemáticas. Al no ilustrarse con situaciones contextualizadas pueden resultar más complicados de lo que ya son de por sí.

4- *Propiedades*: Aunque el tema de espacios vectoriales puede presentarse explicando las múltiples propiedades de estos objetos, se procura simplificarlo al máximo prescindiendo de estas y sólo presentando una a la que se le da el nombre de propiedad fundamental. Esta denominación puede resultar un conflicto ya que es el nombre que le da el texto a la propiedad, pero en otros manuales, ya sean de secundaria o universitarios, se presenta como definición de independencia lineal o simplemente como propiedad, sin aludir a ningún nombre.

5- *Argumentos*: Las propiedades se presentan sin argumentos que las justifiquen, por ejemplo cuando se afirma que las n-uplas de números reales forman un espacio vectorial. Se consideran transparentes para el alumno ciertas afirmaciones sobre combinaciones lineales, como el hecho de que las cuaternas (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1) son independientes. Toda la justificación que aporta el texto es decir que *es evidente.* Por último, cuando se presenta la llamada *propiedad fundamental* se intenta dar una pequeña explicación, pero no una justificación ni siquiera informal o con un ejemplo.

6. Rango de una matriz

Texto y unidades primarias de análisis

6.1

2.6 RANGO DUNHA MATRIZ

Entre as filas das matrices (e tamén entre as súas columnas) poden existir relacións de dependencia lineal, o seu coñecemento será de grande importancia para o estudio dos sistemas de ecuacións.

VECTORES FILA NUNHA MATRIZ

As filas dunha matriz poden ser consideradas vectores. É posible que sexan linealmente independentes (L.I.) e é posible que unhas dependan linealmente doutras. Por exemplo:

6.2

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ As súas dúas filas son L.I.

$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 3 \\ 1 & -17 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$ As dúas primeiras filas son L.I. As outras dúas dependen linealmente das primeiras:

$(3^a) = 5 \cdot (1^a) - 4 \cdot (2^a) \qquad (4^a) = (1^a) + (2^a)$

$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ As dúas primeiras filas son L.I. A terceira depende linealmente delas:

$(3^a) = (1^a) - (2^a)$

6.3

Chamamos **rango dunha matriz** ó número de filas que son linealmente independentes.

Segundo isto, o rango das tres matrices anteriores é 2:

$$ran(A) = 2, \quad ran(B) = 2, \quad ran(C) = 2$$

6.4

VECTORES COLUMNA NUNHA MATRIZ

Tamén as columnas dunha matriz poden ser consideradas vectores. E poderíase definir o *rango dunha matriz como o número de columnas* L.I., pero quédanos a dúbida de se esta definición contradí nalgún caso a anterior. É dicir: ¿é posible que nunha matriz o número de filas L.I. sexa distinto do número de columnas L.I.? O seguinte teorema asegura que isto non é posible.

Teorema:

Nunha matriz, o número de filas L.I. coincide co número de columnas L.I. Segundo isto, **o rango dunha matriz** é o número de filas ou de columnas L.I.

As transformacións ás que se somete unha matriz cando aplicamos o método de Gauss non modifican o rango, é dicir, consérvanse as relacións de dependencia ou independencia lineal da fila transformada coas restantes. Polo tanto, para calcular o rango dunha matriz, podemos proceder a "facer ceros" como no método de Gauss. O rango da matriz graduada final é, obviamente, o número de filas distintas de $(0 \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0)$.

CÁLCULO DO RANGO

O rango dunha matriz 3×5 é, como moito, 3. En xeral, o rango dunha matriz $m \times n$ é, como moito, o menor dos números m ou n.

Na unidade 3 aprenderemos a calcular o rango dunha matriz de maneira máis eficiente. Para iso, utilizaremos unha nova ferramenta matemática, os *determinantes*.

6.5

Complemento teórico

Nunha matriz, o número de filas L.I. coincide co número de columnas L.I.

A demostración que se expón a continuación non é xeral. Pártese dunha matriz 5×4 da que as tres primeiras columnas son L.I. e a cuarta depende linealmente delas. E demóstrase que, necesariamente, ten tres filas L.I.

As tres primeiras columnas, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, dunha matriz A son L.I. A súa cuarta columna, $\boldsymbol{d}$, depende linealmente delas: $\boldsymbol{d} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \\ a^{iv} & b^{iv} & c^{iv} & d^{iv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & \alpha a + \beta b + \gamma c \\ a' & b' & c' & \alpha a' + \beta b' + \gamma c' \\ a'' & b'' & c'' & \alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' \\ a''' & b''' & c''' & \alpha a''' + \beta b''' + \gamma c''' \\ a^{iv} & b^{iv} & c^{iv} & \alpha a^{iv} + \beta b^{iv} + \gamma c^{iv} \end{pmatrix}$$

Observamos que a primeira fila se pode pór do seguinte xeito:

1ª fila: $a(1 \quad 0 \quad 0 \quad \alpha) + b(0 \quad 1 \quad 0 \quad \beta) + c(0 \quad 0 \quad 1 \quad \gamma)$

Analogamente, a segunda fila pode pórse así:

2ª fila: $a'(1 \quad 0 \quad 0 \quad \alpha) + b'(0 \quad 1 \quad 0 \quad \beta) + c'(0 \quad 0 \quad 1 \quad \gamma)$

E o mesmo as outras tres filas. As filas pódense pór todas como C.L. dos vectores fila $(1 \quad 0 \quad 0 \quad \alpha)$, $(0 \quad 1 \quad 0 \quad \beta)$, $(0 \quad 0 \quad 1 \quad \gamma)$.

Significa que só tres das cinco filas, como moito, son L.I. Polo tanto, o número de filas L.I. é menor ou igual có número de columnas L.I.

Analogamente, demostraríase a desigualdade contraria. Polo tanto, probouse que:

nº de filas L.I. = nº de columnas L.I.

Componentes y unidades elementales

- *Situaciones*: ejemplos de dependencia entre las filas de una matriz.
- *Lenguaje*:
  - Notaciones: (3º) = 5·(1º)-4·(2º), (4º) = (1º)+(2º), (3º) = (1º)-(2º), ran(A)
- *Conceptos*: rango de una matriz.
- *Procedimientos:* técnicas para averiguar el máximo número de filas independientes en una matriz
- *Propiedades*: el número de filas linealmente independientes coincide con el número de columnas linealmente independientes.
- *Argumentos*: prueba parcial de la propiedad anterior.

Conflictos semióticos potenciales.

6.1 Se relacionan las filas de una matriz con vectores y la dependencia lineal estudiada en el apartado 5. Se afirma que su conocimiento será de gran importancia para el estudio de los sistemas lineales. De nuevo se intentan crear expectativas que inciten al estudio de estos objetos.

6.2 Ejemplos de dependencia lineal entre las filas de tres matrices. Se utiliza la notación (1º), (2º), (3º) y (4º) para referirse a las filas de una matriz. Cada uno de los ejemplos muestran la dependencia entre las filas, pero no justifican la técnica que permite llegar a esa conclusión, no siendo evidente en algunos casos ((3º) = 5·(1º)-4·(2º)). No se aprovechan los ejemplos para mostrar cómo averiguar si las filas son o no linealmente independientes. Por ejemplo, no se justifica por qué las dos primeras filas de la matriz B son independientes (vectores (5,-1) y (6,3) y no se ha estudiado la propiedad de dependencia en $\mathbf{R}^2$ (que *(a,b)= k(a',b')*). También se afirma que las tres primeras filas de B son dependientes, sin justificar por qué.

6.3 Se define rango de una matiz, designándolo con la notación ran(A), haciendo referencia al número de filas independientes.

6.4 Los resultados expresados anteriormente se formulan de la misma manera para las columnas. También se ponen en juego los conocimientos del alumno sobre un tema anterior introductorio a los sistemas de ecuaciones, indicando que se aplicará el método de Gauss para calcular el rango de la matriz, introduciendo una duda que justifica el teorema que se enuncia a continuación: Nº de filas L.I. = Nº de columnas L.I. En una nota informativa se afirma que "aprenderemos a calcular el rango de manera más eficiente, con una nueva herramienta de cálculo, los determinantes", anticipando de nuevo el próximo objeto de estudio.

6.5 Demostración de que el número de filas linealmente independientes coincide con el número de columnas linealmente independientes. Se hace en un caso particular de una matriz 5×4. En vez de utilizar una notación de subíndices como es habitual al hablar de una matriz cualquiera, se utilizan las letra a, b, c, d y las letras α, β, γ para indicar los números por los que multiplicamos las columnas. Pensamos que esta elección no es muy afortunada. Se titula este apartado *complemento teórico*, en lugar de señalar que se trata de una prueba parcial del teorema. Quizás la demostración no está bien aprovechada, ya que se podría dar la demostración general a partir de este caso particular, o pedir al alumno que demostrase lo que el libro llama "la desigualdad contraria".

Componentes sistémicos

1- *Lenguaje*: Sólo tenemos notaciones nuevas para el alumnado a la hora de explicar como las filas de una matriz dependen de otras. El lenguaje utilizado para presentar un concepto normalmente difícil como es el rango de una matriz carece de una formalidad estricta, lo que le da un carácter empírico al significado de referencia, ya que parece que la forma de ver si alguna fila es combinación lineal de otra no es mecánica ni rutinaria, sino que hay que aplicar un método de ensayo y error.

2- *Situaciones*: Las situaciones presentadas son ejemplos de dependencia entre las filas de una matriz. Aunque el cálculo del rango por el método de Gauss suele ser una actividad propuesta en la Selectividad y que para el alumnado se acaba convirtiendo en un ejercicio rutinario, no hay ninguna situación que ilustre cómo se realiza dicho cálculo.

3- *Conceptos*: El concepto de rango suele ser complicado debido a su abstracción. No se insiste mucho en el concepto en sí ni en su aplicación en la resolución de problemas, sino en las propiedades relacionadas con él.

4- *Procedimientos*: No aparece una técnica rutinaria para averiguar el número de filas independientes de una matriz y la forma que se ofrece para calcular estas filas y, por consiguiente, el rango de una matriz, puede ser un origen de conflictos para el alumnado. Se menciona que se puede utilizar el método de Gauss pero no se explica cómo ni se ofrece un ejemplo ilustrativo.

5- *Propiedades*: La propiedad *el número de filas independientes coincide con el número de columnas independientes* se enuncia en forma de teorema. El uso de la palabra *teorema* puede ser conflictiva para el estudiante ya que, al no estar acostumbrado a una excesiva formalidad en la presentación de los contenidos matemáticos, es posible que no identifique *teorema* con *propiedad*. Este teorema suele ser difícil y en los manuales estudiados en el capítulo 3.2.4 su demostración ocupa un tiempo, por lo que es probable que el alumno de secundaria no lo entienda y opte por memorizarlo.

6- *Argumentos*: Encontramos una prueba de la propiedad anterior para el caso particular de una matriz 5×4. Consideramos que esta justificación no aclarará las dudas del estudiante sobre esta propiedad. La notación utilizada, con las letras *a, b, c*, resultará confusa ya que, por un lado, estos caracteres indican elementos de la matriz, y, por otro, aunque en negrita, indican columnas. Además se considera transparente para el alumnado que si las filas se pueden poner como combinación lineal de las tres cuaternas presentadas, entonces sólo tres de las cinco filas pueden ser independientes.

5.2.2. Determinantes.

La parte del texto que desarrolla el bloque sobre determinantes esta dividida en siete subapartados. Al igual que en *Álgebra de matrices* sólo consideraremos como unidades iniciales de análisis los aspectos teóricos de la unidad. Tenemos las siguientes unidades:

1. Determinantes de orden 2.
2. Determinantes de orden 3.
3. Determinantes de cualquier orden.
4. Menor complementario y adjunto.
5. Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea.
6. Método para calcular determinantes de cualquier orden.
7. Rango de una matriz a partir de sus menores.

1. Determinantes de orden 2.

Texto y unidades primarias de análisis.

1.1

3.1 DETERMINANTES DE ORDE DÚAS

Chámase **determinante** dunha matriz cadrada a un número que se obtén operando de certa maneira cos elementos da matriz. Aprenderemos a obtelo, ó longo da unidade, para matrices de ordes cada vez maiores. Empezamos coas matrices de orde dúas.

O determinante dunha matriz cadrada de orde dúas é un número que se obtén do seguinte xeito:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad det\, A = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12} \qquad \begin{matrix} a_{11} & \\ & a_{22} \end{matrix} \; - \; \begin{matrix} & a_{12} \\ a_{21} & \end{matrix}$$

O determinante de A desígnase, indistintamente, das seguintes formas:

$$det\, A, \quad det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad |A|, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

1.2

Propiedades dos determinantes de orde dúas

DEMOSTRACIÓNS XERAIS

As propiedades seguintes poden ser probadas de forma inmediata operando segundo a definición de determinante.

Sen embargo, fanse razoamentos máis xerais que sexan válidos, tamén, para matrices de ordes superiores.

1. O determinante dunha matriz coincide co da súa transposta.

Por exemplo: $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -5 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = 7 \cdot 11 - (-5) \cdot 4 = 97$

2. Se un determinante ten unha liña (fila ou columna) de ceros, daquela o seu determinante é cero.

Isto é así porque en cada un dos dous sumandos hai un factor cero.

Por exemplo: $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 0 \cdot 6 - 7 \cdot 0 = 0 - 0 = 0$

3. Se permutamos as dúas filas (ou as dúas columnas) dunha matriz, o seu determinante cambia de signo.

Pois o sumando con signo *máis* pasa a ter signo *menos*, e viceversa.

Por exemplo: $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 35 - 6 = 29 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 35 = -29$

4. Se unha matriz ten as dúas filas (ou as dúas columnas) iguais, o seu determinante é cero.

Pois o sumando con signo *máis* coincide co sumando con signo *menos*.

Por exemplo: $\begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = 44 - 44 = 0$

5. Se multiplicamos cada elemento dunha fila (ou dunha columna) dunha matriz por un número, o determinante desa matriz queda multiplicado por ese número.

Pois cada un dos sumandos queda multiplicado polo devandito número.

Por exemplo: $\begin{vmatrix} 5 \cdot 4 & 5 \cdot 9 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}$

6. Se unha matriz ten as súas dúas filas (ou as súas dúas columnas) proporcionais, o seu determinante é cero.

Por exemplo: $\begin{vmatrix} 60 & 6 \\ 70 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \cdot 6 & 6 \\ 10 \cdot 7 & 7 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} = 10 \cdot 0 = 0$

7. Se unha columna (ou unha fila) dunha matriz é suma de dúas, o seu determinante pode descompoñerse en suma dos determinantes de dúas matrices, do seguinte xeito:

$$\begin{vmatrix} a + a' & b \\ c + c' & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a + a' & b \\ c + c' & d \end{vmatrix} = (a + a')d - (c + c')b = (ad - cb) + (a'd - c'b) =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix}$$

8. Se a unha columna (ou a unha fila) dunha matriz se lle suma a outra columna (ou a outra fila) multiplicada por un número, o determinante da nova matriz é igual ó da primeira.

$$\begin{vmatrix} a & b + k \cdot a \\ c & d + k \cdot c \end{vmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & k \cdot a \\ c & k \cdot c \end{vmatrix} \overset{(**)}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

(*) Pola propiedade **7**.

(**) Pola propiedade **6**., xa que as columnas da matriz $\begin{vmatrix} a & k \cdot a \\ c & k \cdot c \end{vmatrix}$ son proporcionais.

DEMOSTRACIÓN

Ó final da unidade, no exercicio 42 de "PARA PENSAR UN POUCO MÁIS", demóstrase esta propiedade.

9. O determinante do producto de dúas matrices é igual ó producto dos seus determinantes: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Por exemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 20 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $A \cdot B = \begin{pmatrix} -8 & 34 \\ -33 & 129 \end{pmatrix}$

$|A| = 5$, $|B| = 18$ $\quad |A \cdot B| = 90 = |A| \cdot |B|$

Componentes y unidades elementales

- *Situaciones*: ejemplos de algunas propiedades de los determinantes.
- *Lenguaje*:
  - Términos y expresiones: determinante.

- Notaciones: det A, det $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, |A|, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

- *Conceptos*: determinante, orden de un determinante.

- *Procedimientos*: Técnicas: cálculo de un determinante de orden 2.

- *Propiedades:* Se enuncian 9 propiedades de los determinantes de orden 2.

- *Argumentos*: Justificación de las propiedades mediante ejemplos numéricos concretos, excepto en las propiedades 7 y 8, que se prueban explícitamemente, usando la definición.

Conflictos semióticos potenciales.

1.1 Se inicia presentando una definición “no formal” de determinante, el texto indica como calcularlo. De hecho, se podría incluir como un apartado más de las matrices cuadradas. No se le da significado matemático alguno, sino que sólo se indica que es un número y se expone su cálculo. Esto para algún autor (Harel, 2000) puede ser origen de conflicto, ya que puede que el estudiante no reconozca los determinantes como unos objetos conceptuales, sino simplemente como una regla de cálculo. Las expresiones matemáticas usadas, están poco cuidadas y pueden originar conflictos semióticos potenciales. Por ejemplo *Se llama determinante de una matriz cuadrada a un número que se obtiene operando de “cierta manera” con los elementos de una matriz*.

1.2 Se formulan nueve propiedades, de las cuales siete se ilustran con un ejemplo y dos se demuestran (para determinantes de orden 2). Pensamos que estas propiedades serían más significativas para los estudiantes si se incluyesen ejemplos de todas ellas y luego se probaran. Aunque, por otra parte, como la definición no se dota de sentido, no deja de ser una mera descripción de una técnica, carente de sentido, como un componente del significado holístico, (Font, 2005), en este momento de estudio.

Componentes sistémicos

1- *Lenguaje*: El lenguaje utilizado puede resultar confuso para los estudiantes ya que se pretende que no sea demasiado formal, por un lado, pero, por otro, se intentan presentar las definiciones de la manera que es usual en esta materia. La forma de introducir el apartado, y con ella la unidad didáctica, es un claro ejemplo de ello: *Chámase determinante de unha matriz cadrada a un número que se obtén operando de certa maneira cos elementos da matriz.* Los estudiantes están acostumbrados a que el formato *Chamase…* sea una definición matemática que hay que memorizar. Sin embargo, no se puede decir que esto que presenta el texto sea la definición de determinante.

2- *Situaciones*: Las situaciones vienen dadas en forma de ejemplos de las propiedades de los determinantes. A medida que se van sucediendo estas se considera que el alumno puede asumir pasos por sí solo, es decir, en las cuatro primeras propiedades se especifican todos los pasos a seguir, cosa que no sucede en los ejemplos restantes, presentándose alguna de las últimas propiedades (7 y 8) ya de forma teórica, sin ningún ejemplo numérico.
3- *Conceptos*: No se aporta un significado matemático de la noción de determinante, sólo se indica cómo se realiza su cálculo. No se explica el concepto de orden de un determinante, considerándose claro al haber estudiado anteriormente las matrices.
4- *Procedimientos*: La técnica presentada tiene carácter formal, ilustrándose después con ejemplos. Sin embargo, no se le da un carácter empírico en ningún momento, lo que hubiera propiciado al alumno llegar al cálculo del determinante por sí mismo. El aporte de la epistemología, estudiada en el capítulo 3.2, sobre cómo llegar a descubrir el determinante a partir de los sistemas de ecuaciones lineales, hubiera contribuido a dotar a esta técnica de un contenido empírico. Según Godino, Bencomo, Font y Wilhemi (2006) el no armonizar una configuración epistémico empírica con una configuración formal es fuente de conflictos semióticos.
5- *Propiedades*: Las propiedades de los determinantes de orden dos son el objeto de este apartado, presentándose sin permitir al alumno llegar a estos resultados por sí solo.
6- *Argumentos*: No todas las propiedades se justifican de la misma manera: siete de ellas se ilustran con ejemplos y dos con un argumento formal. Tampoco se argumenta el porqué de esta decisión por parte de los autores del texto.

2. Determinantes de orden 3.

<u>Texto y unidades primarias de análisis</u>

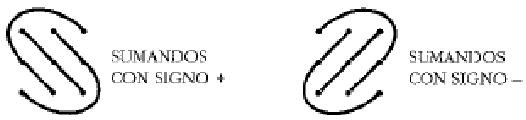
<table>
<tr><td>2.1</td><td>

3.2 DETERMINANTES DE ORDE TRES

O determinante dunha matriz 3×3 obtense do seguinte xeito:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

- **En cada producto hai un factor de cada fila e un de cada columna.** Para comprobalo, observamos que en cada producto hai tres elementos. Os primeiros subíndices (filas) son, sempre, 1 2 3. Os segundos subíndices son tamén 1 2 3, ordenados de diversas formas.
- **Están tódolos posibles productos cun factor de cada fila e un de cada columna**, pois os subíndices das columnas son todas as permutacións de 1, 2, 3. Hai $3! = 6$.
- A metade dos sumandos ten **signo** + e a outra metade **signo** –. Estes seis sumandos lémbranse facilmente coa seguinte regra mnemotécnica, chamada **regra de Sarrus**:



</td></tr>
<tr><td>2.2</td><td>

Propiedades

As propiedades enunciadas para os determinantes de orde 2 son tamén válidas para calquera determinante. Enunciámolas a continuación de forma xeral e exemplificamos con determinantes de orde tres. Engádese unha nova propiedade, que situaremos no lugar 9.

</td></tr>
</table>

1. O determinante dunha matriz é igual có da súa transposta.
$|A| = |A^t|$

2. Se unha matriz cadrada ten unha liña (fila ou columna) de ceros, o seu determinante é cero.

Pois en cada un dos sumandos aparece como factor un elemento desa liña. Todos os sumandos son, polo tanto, nulos.

3. Se se permutan dúas liñas paralelas dunha matriz cadrada, o seu determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 3\cdot4\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 5\cdot1\cdot8 - 5\cdot4\cdot7 - 3\cdot6\cdot8 - 2\cdot1\cdot9$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 7\cdot4\cdot5 + 8\cdot6\cdot3 + 9\cdot1\cdot2 - 9\cdot4\cdot3 - 7\cdot6\cdot2 - 8\cdot1\cdot5$$

Os sumandos son os mesmos pero cos signos cambiados.

DEMOSTRACIÓN DE 4.

Se se permutan as dúas liñas iguais, o determinante queda igual. Pero, pola propiedade **3**, debería cambiar de signo. O 0 é o único número que queda igual aínda que se cambie de signo.

4. Se unha matriz cadrada ten dúas liñas paralelas iguais, o seu determinante é cero.

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 8 & 6 & 9 \\ 8 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 4\cdot6\cdot9 + 8\cdot6\cdot(-2) + 8\cdot5\cdot9 - 8\cdot6\cdot(-2) - 8\cdot5\cdot9 - 4\cdot6\cdot9$$

Cada sumando está unha vez con signo *máis* e outra con signo *menos*.

DEMOSTRACIÓN DE 5.

Cada sumando ten un factor multiplicado por k. Polo tanto, toda a suma queda multiplicada por k.
(k é factor común).

5. Se multiplicamos polo mesmo número todos os elementos *dunha liña* (fila ou columna) dunha matriz cadrada, o seu determinante queda multiplicado por ese número.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7k \\ 2 & 4 & 8k \\ 5 & 6 & 9k \end{vmatrix} = 3\cdot4\cdot9k + 2\cdot6\cdot7k + 5\cdot1\cdot8k - 5\cdot4\cdot7k - 2\cdot1\cdot9k - 3\cdot6\cdot8k =$$

$$= k(3\cdot4\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 5\cdot1\cdot8 - 5\cdot4\cdot7 - 2\cdot1\cdot9 - 3\cdot6\cdot8) =$$

$$= k\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

DEMOSTRACIÓN DE 6.

Abonda con aplicar a propiedade **5**. E extraer do determinante o factor de proporcionalidade. Quédannos, daquela, dúas liñas iguais que, pola propiedade **4**, fan que o determinante se anule.

6. Se unha matriz cadrada ten dúas filas (ou dúas columnas) proporcionais, o seu determinante é cero.

7. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Esta descomposición é válida calquera que sexan a fila ou a columna na que se atopen os sumandos.

8. Se a unha liña dunha matriz lle sumamos unha combinación lineal das demais paralelas, o seu determinante non varía.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3+11\cdot5-16\cdot2 \\ 4 & 8 & 1+11\cdot8-16\cdot4 \\ 6 & 9 & 7+11\cdot9-16\cdot6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \\ 6 & 9 & 7 \end{vmatrix}$$

DEMOSTRACIÓN DE 9.
Pódese descompoñer en suma de varios determinantes, cada un dos cales é cero por ter dúas liñas proporcionais.

9. Se unha matriz ten unha liña que é combinación lineal das demais paralelas, daquela o seu determinante é cero. E reciprocamente: se un determinante é cero, ten unha fila (e unha columna) combinación lineal das demais.

10. O determinante do producto de dúas matrices é igual ó producto dos seus determinantes: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Componentes y unidades elementales

- *Situaciones:* ejemplos para comprobar algunas propiedades de los determinantes.
- *Lenguaje:* Términos y expresiones: permutaciones de 1,2,3, Regla de Sarrus

Notaciones: 3!

-*Procedimientos:* técnicas de cálculo de determinantes de orden 3. Regla de Sarrus.

-*Propiedades*: Propiedades de los determinantes de orden 3.

-*Argumentos*: Las propiedades se prueban dando un ejemplo concreto y al lado de él una justificación discursiva marcamente verbal.

Conflictos semióticos potenciales.

2.1 Se indica cómo calcular el determinante de una matriz 3×3. El texto intenta ayudar a memorizar esta fórmula describiendo cómo son los productos presentes en la misma. No se presentan ejemplos, pero se calculan dos determinantes en los “ejercicios resueltos” presentados a continuación. Se asume conocido por el alumno el cálculo de las permutaciones, así como el uso de la notación n!.

2.2 Se formulan diez propiedades de los determinantes, de las cuales todas coinciden con las propiedades de los determinantes de orden 2, excepto la número nueve, que por poner en juego tres líneas de un determinante, no tenía sentido en el apartado anterior. Cuatro de las propiedades se ilustran con ejemplos. Postulamos que algunas expresiones como *si una matriz tiene dos “líneas paralelas” iguales, su determinante es cero*, aparte de confusas, pueden provocar conflictos semióticos, al identificar “líneas paralelas”, en el ejemplo numérico que se propone, con filas o columnas contiguas.

Componentes sistémicos

1- *Lenguaje*: Encontramos expresiones y notaciones que se suponen conocidas por el estudiante, como las referentes a las permutaciones de 1,2,3, pero que pueden ser origen de conflictos ya que el tema de combinatoria no es objeto de aprendizaje en secundaria y, con toda probabilidad, el estudiante no conocerá estos términos.

2- *Situaciones*: Al igual que en el apartado anterior, las situaciones vienen dadas en forma de ejemplos. De hecho, la forma de presentar el apartado supone una continuación del anterior, lo cual evita conflictos semióticos.
3- *Procedimientos*: Se presenta la técnica para calcular determinantes de orden 3 y se intenta dar pautas que ayuden a memorizarla de modo razonado.
4- *Propiedades*: Se parte de los conocimientos previos del alumno ya que se han enunciado las propiedades para los determinantes de orden dos en el apartado anterior. Esto se recuerda a los estudiantes para facilitarles esta relación. No se ve, como tampoco se veía en el apartado anterior, para qué pueden servir estas propiedades para resolver problemas matemáticos o de aplicación, por lo que quedan un poco descontextualizadas.
5- *Argumentos*: Se argumenta mediante ejemplos, lo cual ayuda a clarificar las ideas del alumnado. Sin embargo, consideramos que esto no es suficiente para relacionar los enunciados de las propiedades con situaciones-problema.

3. Determinantes de cualquier orden.

Texto y unidades primarias de análisis

3.1	**3.3 DETERMINANTES DE CALQUERA ORDE** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ O determinante dunha matriz $n \times n$ é o resultado de sumar todos os posibles productos de n elementos, un de cada fila e un de cada columna, co seu signo ou co signo cambiado segundo un certo criterio.
3.2	**Propiedades** A definición anterior é válida para determinantes de ordes 2 e 3. As dez propiedades que se viron para determinantes de orde 3 son válidas para calquera determinante. Nembargantes, para o cálculo dun determinante de orde maior que 3 necesítase unha nova propiedade, e un procedemento baseado nela, que veremos nos próximos apartados.

Componentes y unidades elementales
-*Lenguaje*: Notaciones: representación de un determinante nxn
-*Conceptos:* Definición muy confusa de determinante de una matriz n×n.
-*Propiedades:* No se enuncian propiedades, concretas sino que se remite a las formuladas para determinantes 2x2 y 3x3.

-*Argumentos*: Se afirma, sin justificación alguna, que “las 10 propiedades que se vieron para determinantes de orden 3 son válidas para cualquier determinante”.

<u>Conflictos semióticos potenciales.</u>

3.1 Se formula la definición general de determinante de manera muy confusa ... *según un cierto criterio* se trata de un intento de generalización sin “sentido”.Al igual que en el apartado anterior se dice que algunos productos conservan su signo y otros lo cambian “según un cierto criterio”, pero sin explicar cuál es este criterio.

3.2 Se menciona que las propiedades son las mismas que las enunciadas en el apartado anterior sin justificación alguna de esta afirmación. En esta unidad no se presenta ninguna situación o tarea que motive y ejemplifique las nociones introducidas. La disparidad entre expresión y contenido es potencialmente generadora de conflictos semióticos: se anuncian nuevas técnicas basadas en una nueva propiedad *que se verá en próximos capítulos*. Tanto la definición de determinante como sus propiedades carecen de cualquier tipo de formalismo. Esto tiene sus ventajas, ya que diversos autores (Ortega [2002] o Sierpinska, Dreyfus y Hillel [1999]) afirman que gran parte de las dificultades que tienen los estudiantes para asimilar el Álgebra Lineal vienen de lo que ellos llaman el *obstáculo del formalismo*, que puede llevar a operar con expresiones sin ver estas expresiones referidas a algo más que ellas mismas. Sin embargo, también se puede llegar al otro extremo, ya que, al carecer de formalismo, los objetos matemáticos se convertirán en simples algoritmos de cálculo.

<u>Componentes sistémicos</u>

1- *Lenguaje*: El lenguaje utilizado es confuso ya que presentar definiciones dejando parte por explicar es fuente de conflictos semióticos. No se refleja la relación con el contenido presentado.

2- *Conceptos*: Se presenta el concepto de determinante de orden n, aunque el texto confunde la definición con la manera de calcularlo.

3- *Propiedades*: Se remite a las propiedades enunciadas anteriormente.

4- *Argumentos*: No se justifican las propiedades de los determinantes, ni siquiera con ejemplos. Tampoco tendría sentido presentar argumentaciones formales si se ha remitido a los apartados anteriores para la presentación de las propiedades.

4. Menor complementario y adjunto.

Texto y unidades primarias de análisis

	3.4 MENOR COMPLEMENTARIO E ADXUNTO
4.1	**"Menor" dunha matriz** Se nunha matriz seleccionamos r filas e r columnas, os elementos nos que se cruzan forman unha submatriz cadrada de orde r. O determinante desa submatriz chámase **menor de orde r** da matriz inicial.
4.2	Por exemplo: $\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \rightarrow \\ \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 7 & \mathbf{-5} & \mathbf{-2} & 9 & \mathbf{3} \\ 2 & 4 & 6 & 3 & 6 \\ 9 & \mathbf{3} & \mathbf{0} & 8 & \mathbf{2} \\ 5 & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & -2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{array}$ Seleccionamos un **menor de orde tres**. O seu valor é: $\begin{vmatrix} -5 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -23$
4.3	**"Menor complementario" e "adxunto" dun elemento nunha matriz cadrada** Se nunha matriz cadrada $n \times n$ salientamos un elemento, a_{ij}, ó suprimir a súa fila e a súa columna obtense unha submatriz $(n-1) \times (n-1)$. O seu determinante é un menor de orde $n-1$ que se chama **menor complementario** do elemento a_{ij}, e que se designa por α_{ij}
4.4	Chámaselle **adxunto** de a_{ij} ó número $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$, é dicir, ó menor complementario co seu signo ou co signo cambiado, segundo que $i+j$ sexa par ou impar.

Componentes y unidades elementales

- *Situaciones*: ejemplo de un menor de orden 3.
- *Lenguaje*:
  - Términos y expresiones: menor de una matriz, menor complementario y adjunto.
  - Notaciones: α_{ij}, A_{ij}.
- *Conceptos*: menor de orden r, menor complementario, adjunto.

Conflictos semióticos potenciales.

4.1 Se requiere que el lector interprete la letra *r* como un número natural igual o menor que la menor de las dimensiones de la matriz. No se aclara el uso de la palabra *submatriz*, quedando para el lector la interpretación de que es una matriz formada por los elementos de otra. La expresión *...los elementos en los que se cruzan..* puede originar conflictos semióticos.

4.2 Se presenta un ejemplo de un menor de orden 3.

4.3 Definición de menor complementario de un elemento a_{ij} de una matriz.

4.4 Se define el adjunto de a_{ij}, denotándolo como A_{ij}, sin ejemplo concreto aclaratorio.

Componentes sistémicos

1- *Lenguaje*: Puede crear confusión el hecho de introducir términos nuevos utilizando comillas, mientras que otros, como el de submatriz, simplemente se utilizan sin explicar. El lenguaje que se utiliza para introducir el concepto de adjunto es notacional, aunque después se da una explicación verbal.

2- *Situaciones*: Se da un ejemplo de menor de orden tres, mientras que no se hay ninguna situación que ilustre los conceptos de menor complementario y adjunto.

3- *Conceptos*: El concepto de submatriz se considera transparente para el estudiante, mientras que los de menor complementario y adjunto no se ilustran con ningún ejemplo, siendo suficiente con su definición.

5. Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea.

Texto y unidades primarias de análisis

5.1	**3.5 DESENVOLVEMENTO DUN DETERMINANTE POLOS ELEMENTOS DUNHA LIÑA** Imos estudiar dúas novas propiedades dos determinantes. A primeira resultará moi útil para calcular determinantes de orde maior que 3. **11.** Se *os elementos dunha fila ou columna* dunha matriz cadrada *se multiplican polos seus respectivos adxuntos e se suman os resultados,* obtense o determinante da matriz inicial. Dise entón que o determinante está **desenvolvido** polos elementos desa liña. Por exemplo, o desenvolvemento dun determinante de orde 3 polos elementos da segunda fila é: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \lvert A \rvert = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$
5.2	**Demostración** $\lvert A \rvert = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} =$ $= a_{21}(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) + a_{23}(a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32}) =$ $= a_{21} \cdot (-1) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \cdot (-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$ $= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$

5.3 **Unha última propiedade dos determinantes**

12. Se os elementos dunha fila (ou columna) se multiplican polos respectivos adxuntos doutra paralela, o resultado da suma é cero.

Por exemplo, $a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} = 0$

5.4 **Demostración**

$$\alpha A_{31} + \beta A_{32} + \gamma A_{33} = \alpha\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - \beta\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + \gamma\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

A última igualdade débese a que o que hai arriba é o desenvolvemento do determinante de abaixo segundo os elementos da terceira fila.

Se α, β, γ son, respectivamente, a_{21}, a_{22}, a_{23}, o determinante ten dúas filas iguais e, polo tanto, é cero.

<u>Componentes y unidades elementales</u>

-*Situaciones:* No hay propiamente enunciada ninguna situación.

-*Procedimientos:* técnicas de cálculo de un determinante desarrollándolo por los elementos de una línea.

-*Propiedades:* 1. Si los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada se multiplican por sus respectivos adjuntos y se suman los resultados, se obtiene el determinante de la matriz inicial. 2. Si los elementos de una fila o columna se multiplican por los respectivos adjuntos de otra paralela, el resultado de la suma es 0.

-*Argumentos*: Se realiza una demostración deductiva, de la propiedad general anterior, para el caso de un determinante 3x3.

<u>Conflictos semióticos potenciales.</u>

5.1 Se presenta otra técnica de cálculo de un determinante. Esta propiedad sólo es objeto de discurso teórico, presentando una praxis en los “ejercicios resueltos”.

5.2 Se establece la equivalencia entre la definición dada para determinante de orden 3 y el enunciado 5.1, lo cual demuestra la propiedad para este orden. No se menciona que podemos trasladar este razonamiento a determinantes de orden mayor.

5.3 Se enuncia la “última propiedad” de los determinantes y se ilustra con un ejemplo, aunque deja la comprobación de los cálculos al estudiante.

5.4 La demostración comienza sin comentar qué son o qué representan α, β y γ, lo cual puede ser conflictivo para el lector. Podría plantearse otra demostración que no utilizase estas letras y resultase más sencilla.

Componentes sistémicos

1- *Situaciones*: La única situación que podríamos mencionar es el ejemplo que ilustra la propiedad 11. Sin embargo, el alumno no la identificará como una situación ya que no es un ejemplo numérico, que es a lo que el estudiante está acostumbrado. Se hace uso de los adjuntos de un determinante, aunque más que el concepto, el alumno necesita conocer la técnica de cálculo para comprender cómo se desarrolla un determinante por una fila o una columna.

2- *Procedimientos*: Nuevamente nos encontramos con una técnica de cálculo que el alumno sólo necesitará memorizar e interiorizarla como rutina. Este algoritmo no se inserta en un procedimiento que permita resolver problemas, siendo sólo ejercicios las situaciones que se plantearán para poner en práctica dicha técnica.

3- *Propiedades*: Las explicaciones ofrecidas sobre las propiedades son confusas y discordantes con lo que el texto pretende transmitir ya que, por un lado, las propiedades se enuncian para determinantes de cualquier orden y, por otro, sólo se ofrecen ejemplos o justificaciones para determinantes de orden tres. Esto puede dar lugar a un conflicto semiótico de tipo interaccional (Godino, Bencomo, Font y Wilhemi, 2006).

4- *Argumentos*: Se demuestran las propiedades de forma deductiva. Consideramos que la primera demostración puede originar un conflicto epistémico ya que el estudiante se preguntará cómo sabemos que hay que sacar factor común en un determinado momento y qué factor común hay que sacar. Quizás sería necesaria una explicación verbal de alguno de los pasos.

6. Método para calcular determinantes de cualquier orden.

Texto y unidades primarias de análisis

6.1	**3.6 MÉTODO PARA CALCULAR DETERMINANTES DE CALQUERA ORDE** Como vimos na páxina anterior, para calcular un determinante de orde grande, resulta moi vantaxoso que teña algunha fila con varios ceros, cantos máis, mellor. Pero ¿e se non os ten? Neste caso, *fabricámolos*. A idea para fabricar ceros é moi similar á que se utiliza no método de Gauss para a resolución de sistemas de ecuacións lineais. Aquí, nos determinantes, aplicaremos a propiedade **8** simplificada: *Se a unha liña lle sumamos o producto dunha paralela por un número, o seu determinante non varía*. Vexámolo cuns exemplos.

Componentes y unidades elementales

-Procedimiento: exposición discursiva, puramente verbal de una técnica para calcular determinantes de orden "grande".

Conflictos semióticos potenciales.

6.1 Se presenta esta técnica, dejando la praxis para los "ejercicios resueltos". Se relaciona este procedimiento con el utilizado en el tema 1 para resolver sistemas de ecuaciones lineales (método de Gauss).

Componentes sistémicos

1- *Procedimientos*: La técnica se presenta con lenguaje ordinario, evitando el uso de expresiones simbólicas.

7. El rango de una matriz a partir de sus menores.

<u>Texto y unidades primarias de análisis.</u>

3.7 O RANGO DUNHA MATRIZ A PARTIR DOS SEUS MENORES

7.1

Segundo vimos na unidade anterior, *o rango dunha matriz é o número de filas (ou de columnas) linealmente independentes*. Esta definición permite pescudar rangos mediante o método de Gauss.

Agora pretendemos utilizar os determinantes para o cálculo de rangos. Para iso, lembremos a propiedade **9**.

A condición necesaria e suficiente para que o determinante dunha matriz cadrada sexa cero é que as súas filas (ou columnas) sexan linealmente dependentes, é dicir, que algunha delas se poida pór como combinación lineal das outras. É dicir:

$|A| = 0 \Leftrightarrow$ as filas de A son linealmente dependentes

ou ben: $|A| \neq 0 \Leftrightarrow$ as filas de A son linealmente independentes

Esta propiedade proporciónanos unha nova definición de rango dunha matriz:

Rango dunha matriz é a máxima orde dos seus menores non nulos.

7.2

■ Por exemplo: $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-5} & -3 & \mathbf{0} & 6 \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & -1 & \mathbf{6} & -2 \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & 2 & \mathbf{-1} & 0 \\ 1 & 10 & 5 & -15 & 10 \end{pmatrix}$

O determinante da submatriz sinalada en negra vale -105 (compróbao). Por ser distinto de 0, podemos asegurar que as súas tres filas son L.I. Polo tanto, tamén son L.I. as primeiras filas de A, co que o rango de A é, polo menos, 3. $[ran(A) \geq 3]$

En A hai cinco menores de orde 4 (combinacións de 5 columnas tomadas 4 a 4). Pero os cinco son nulos. Iso significa que a cuarta fila de A depende linealmente das tres primeiras. O rango de A non é 4. Polo tanto, $ran(A) = 3$, que é a orde do menor sinalado en negra, pois os menores de orde superior son todos nulos.

7.3

■ Outro exemplo: $B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & 0 & 5 & 4 & 8 \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & 1 & 6 & 2 & 9 \\ 1 & 8 & 1 & 11 & 6 & 17 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 10 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

O determinante da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, formada polas dúas primeiras columnas, é distinto de cero. Polo tanto, as dúas primeiras filas son linealmente independentes.

Se calcularamos os menores de orde tres, veriamos que todos eles son cero. Polo tanto, tamén son cero os de orde catro e os de orde cinco. O rango da matriz é 2.

Se temos en conta que nesta matriz hai 200 menores de orde 3, a tarefa de calculalos todos sería inmensa. Na páxina seguinte verás un método para calcular o rango dunha matriz de forma simplificada.

7.4	**Método para calcular o rango dunha matriz a partir dos seus menores** A cantidade de "menores" que ten unha matriz é enorme. Como curiosidade, digamos que unha matriz 4 × 5 ten 60 menores de orde 2, 40 de orde 3 e 5 de orde 4. Non cabe pensar en calculalos todos para achar o seu rango. O método que describimos a continuación, mediante un exemplo, permítenos calcular o rango dunha matriz con razoable rapidez.

Componentes y unidades primarias de análisis

- *Situaciones*: dos ejemplos del cálculo del rango.
- *Procedimientos*: cálculo del rango a partir de los menores.
- *Propiedades*: el rango de una matriz es el máximo orden de sus menores no nulos.

Conflictos semióticos potenciales.

7.1 Se recuerda la definición de rango dada en la unidad anterior, y la propiedad 9 de los determinantes explicada en el apartado 2 de la presente unidad. Se asume que con esta afirmación el alumno puede deducir que el rango de una matriz es el máximo orden de sus menores no nulos. El texto no presenta ninguna justificación que permita conectar la definición anterior de rango y la propiedad enunciada de los determinantes con la nueva definición. Nuevamente se echa en falta una justificación algebraica, característica que para Gascón (1998) es propia del estado actual de la enseñanza de las matemáticas.

7.2 Se presenta una matriz, marcando en negrita algunos de sus términos. Las filas de la submatriz señalada son linealmente independientes. Sin embargo, no se explicita al lector las razones por las cuales también son linealmente independientes las primeras filas de la A. Se concluye que ran(A) ≥ 3 y se sigue con la exposición de porqué no puede ser 4.

7.3 En este ejemplo se presenta una matriz B 5×6, en la que hay cuatro términos resaltados en negrita. Aunque no se hacen todos los cálculos (sería imposible por ser demasiado largos) queda claro que el rango es 2.

7.4 Sólo se justifica el uso de un nuevo método por la cantidad de cálculo que habría que hacer para calcular el rango de una matriz a partir de sus menores. El método se explica en los "ejercicios resueltos".

Componentes sistémicos

1- *Situaciones*: Las situaciones son ejemplos de cálculo de rango de matrices de dimensiones 4×5 y 5×6. No son muy ilustrativas para el estudiante ya que no se explicitan todos los pasos que luego realizará el alumno cuando tenga que calcular el rango de matrices por sí solo.

2- *Procedimientos*: Para explicar el procedimiento del cálculo del rango se recuerda una propiedad enunciada en apartados anteriores. No se explicitan los pasos a seguir, por lo que el estudiante se verá en dificultades a la hora de calcular este rango por sí solo. Para un alumno de secundaria el texto o el profesor explican un procedimiento cuando se presenta un proceso mecánico que se debe repetir con pequeñas modificaciones a la hora de resolver una situación. En este caso falta un ejemplo que permita al estudiante "calcar" la técnica para calcular el rango utilizando menores.

3- *Propiedades*: Se utiliza una propiedad estudiada anteriormente para presentar una nueva propiedad; sin embargo, no se explica detalladamente la relación que puede haber entre ellas. Esto puede ser causa de conflicto para el estudiante por lo que se creará un desfase entre el significado institucional de rango y los posibles sigificados personales: para el alumno esto será una definición, ya que así lo dice el texto, mientras que la definición de rango para la institución mtemática es otra, siendo lo enunciado una propiedad del rango de una matriz.

5.3- *Significado sistémico del "Álgebra de Matrices" y "Determinantes".*

En las siguientes tablas sintetizamos los distintos componentes del significado sistémico o praxeológico puesto en juego en el texto. Las tablas describen la estructura de la "praxeología local" (Chevallard, 1999) sobre Álgebra de Matrices y Determinantes implementada en el texto, la cual constituye el marco de referencia institucional del proceso de estudio, junto con las tareas y explicaciones dadas en clase por el profesor correspondiente.

A continuación presentamos las tablas de las componentes correspondientes de los bloques de contenidos en consideración:

Álgebra de Matrices

Componentes lingüísticos

Unidad	Componente
1	- Términos y expresiones: tablas numéricas, matrices, cajas rectangulares, filas, columnas, dimensión, vector fila, vector columna, matriz cuadrada, término, matrices iguales, traspuesta, simétrica, triangular, coincidir término a término. - Notaciones: A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$, m×n, a_{ij}, A = $\left(a_{ij}\right)_{j=1,...,n}^{i=1,...,m}$, A = $(a_{ij})_{m,n}$, A^T
2	- Notaciones: $k\cdot(a_{ij})_{m,n}$, $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$
3	- Términos y expresiones: asociativa, conmutativa, elemento neutro, opuesta, grupo abeliano, propiedades distributivas. - Notaciones: $0_{m,n}$, $M_{m,n}$
4	- Términos y expresiones: matriz unidad, diagonal principal, matriz inversa, operación interna, operación externa, elemento simétrico. - Notaciones: I_n, A^{-1}
5	- Términos y expresiones: rango de una matriz, espacio vectorial, flecha, n-uplas de números reales, par, terna, cuaterna, combinación lineal, vectores linealmente dependientes, vectores linealmente independientes. - Notaciones: $\vec{u}, \vec{v}$, (V,+,·), R^n.
6	- Notaciones: (3º) = 5·(1º)-4·(2º), (4º) = (1º)+(2º), (3º) = (1º)-(2º), ran(A)

Componentes situacionales.

Unidad	Componente
1	Ejemplos de matrices de diferente dimensión y matrices trapuestas. Ejemplos de tablas numéricas.
2	Ejemplos de operaciones realizadas con matrices. Ejemplos de aplicaciones de las operaciones con matrices.
3	Ejemplo de la opuesta de una matriz.
4	Ejemplo de matriz unidad y matriz inversa.
5	Ejemplo de combinación lineal.
6	Ejemplo de dependencia entre las filas de una matriz.

Componentes actuativos.

Unidad	Componente
2	Técnica del cálculo de la suma de matrices, del producto de un número por una matriz y del producto de matrices.

Componentes conceptuales.

Unidad	Componente
1	Matriz, dimensión, fila, columna, vector fila, vector columna, matiz cuadrada, matrices iguales, traspuesta, simétrica, triangular.
3	Grupo abeliano
4	Matriz unidad, diagonal principal, matriz inversa
5	Espacio vectorial, n-uplas de números reales, combinación lineal de vectores, dependencia e independencia lineal.
6	Rango de una matriz

Componentes proposicionales.

Unidad	Componente
1	Los elementos son números reales. Para que una matriz sea simétrica, necesariamente ha de ser cuadrada.
2	Para que dos matrices se puedan sumar es necesario que tengan la misma dimensión. Para que dos matrices A y B se puedan multiplicar, A·B, es necesario que el número de columnas de la primera sea igual al número de filas de la segunda.
3	Propiedades de la suma: asociativa, conmutativa, elemento neutro, matriz opuesta. Propiedades del producto de un número por una matriz: $a\cdot(b\cdot A) = (ab)\cdot A$, $(a+b)\cdot A = a\cdot A+b\cdot A$, $a\cdot(A+B) = a\cdot A+a\cdot B$, $1\cdot A = A$ Propiedades del producto de matrices: asociativa, no conmutativo. Propiedades distributivas.
4	Cualquiera que sea $A \in M_{m,n}$, $A\cdot I_n = I_n\cdot A = A$. Propiedades de las operaciones internas. Propiedades de la operación externa.
5	Propiedad fundamental: la condición necesaria y suficiente para que los vectores $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n$ sean linealmente independientes, es que la igualdad $x_1\vec{u}_1 + \dots x_n\vec{u}_n = 0$ sólo sea cierta cuando todos los números son cero.
6	El número de filas linealmente independientes coincide con el número de columnas linealmente independientes.

Componentes argumentativos.

Unidad	Componente
6	Prueba parcial de que el número de filas linealmente independientes coincide con el número de columnas linealmente independientes con un caso particular de una matiz 5×4

Determinantes

Componentes lingüísticos.

Unidad	Componente
1	- Términos y expresiones: determinante. - Notaciones: det A, det $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \lvert A \rvert, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
2	- Términos y expresiones: permutaciones de 1,2,3. - Notaciones: 3!
4	- Términos y expresiones: menor de una matriz, menor complementario, adjunto submatriz. - Notaciones: α_{ij}, A_{ij}.

Componentes situacionales.

Unidad	Componente
1	Ejemplos de algunas propiedades de los determinantes de orden 2.
2	Ejemplos de algunas propiedades de los determinantes de orden 3.
4	Ejemplo de un menor de orden 3.
7	Ejemplos del cálculo del rango.

Componentes actuativos.

Unidad	Componente
1	Cálculo de un determinante de orden 2.
2	Cálculo de determinantes de orden 3. Regla de Sarros.
5	Cálculo de un determinante desarrollándolo por los elementos de una línea.
6	Exposición del método para calcular determinantes de orden “grande”.
7	Cálculo del rango a partir de los menores.

Componentes conceptuales.

Unidad	Componente
1	Determinante
3	Determinante de una matriz m×n.
4	Menor de orden r, menor complementario, adjunto.

Componentes proposicionales.

Unidad	Componente
1	Propiedades de los determinantes de orden 2.
2	Propiedades de los determinantes de orden 3.
5	Si los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada se multiplican por sus respectivos adjuntos y se suman los resultados, se obtiene el determinante de la matriz inicial. Si los elementos de una fila o columna se multiplican por los respectivos adjuntos de otra paralela, el resultado de la suma es cero.
7	El rango de una matriz es el máximo orden de sus menores no nulos.

Componentes argumentativos.

Unidad	Componente
1	Validación de las propiedades mediante comprobación con ejemplos.
2	Validación de las propiedades mediante comprobación con ejemplos.
5	Demostración de las propiedades enunciadas en este apartado.

5.4- *Síntesis de conflictos semióticos potenciales.*

Pensamos que la técnica del análisis semiótico que hemos aplicado y desarrollado en este trabajo constituye un recurso útil para la investigación en didáctica de las matemáticas, ya que permite identificar significados puestos en juego en el uso de términos y expresiones matemáticas. El análisis semiótico permite identificar diferencias entre los significados atribuidos a las expresiones por sujetos en interacción didáctica. Estas diferencias originan conflictos semióticos que pueden aclarar las dificultades de los estudiantes en el proceso de estudio y en la resolución de problemas relacionados con los temas estudiados.

A título de ejemplo, y como resumen, indicamos a continuación los principales conflictos semióticos encontrados en el análisis realizado.

1. En ningún momento del proceso de estudio se hace referencia a cómo aparecen históricamente las matrices y determinantes. Como sabemos, la idea de determinante precede a la idea de matriz y ambos surgen a partir del estudio de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Aunque el bloque de Álgebra Lineal consta de cuatro unidades, siendo la primera de ellas los Sistemas de Ecuaciones y Método de Gauss, las unidades 2 y 3, correspondientes a Matrices y Determinantes no hacen ninguna referencia a los sistemas de ecuaciones, por lo que su estudio queda descontextualizado. Las matrices se definen como tablas numéricas rectangulares y los determinantes como números que se obtienen operando de cierta manera con los elementos de una matriz cuadrada. Sólo al comienzo de la unidad 4, Resolución de sistemas mediante determinantes, de la cual no se realizó un análisis semiótico, se hace un desarrollo del concepto de determinante, partiendo de un sistema 2×2 (pag 98), similar al realizado por MacLaurin en 1729 aunque sin mencionar éste.

Parece obvio que en un curso de 2º de Bachillerato no podemos permitirnos abordar todos los conceptos desde un punto de vista histórico, ya que esto necesitaría mucho tiempo y la introducción de conceptos, para los cuales el alumnado carecería del conocimiento de base necesario. Sin embargo, nos parece que las definiciones presentadas, sobre todo en el caso de matriz, no permiten ver a los estudiantes con claridad cuál es el papel de estos objetos dentro de las matemáticas, hecho que se pone de manifiesto en el texto por las dificultades en dar una definición clara de los conceptos de matriz y determinante. Según Noriega y Núñez (2001), cualquier intento de dar respuesta a los múltiples interrogantes científicos que pueden plantearse en relación con los significados de los objetos matemáticos debe realizarse a partir de la perspectiva epistemológica a través de la cual el investigador concibe la naturaleza de los objetos y, en términos generales, de la actividad matemática.

Por otro lado no se presenta ninguna situación que haga ver al estudiante la necesidad de introducir nuevos elementos matemáticos para su resolución. Por ejemplo, partiendo del método de Gauss, se puede plantear un sistema de ecuaciones cuyas operaciones se compliquen mucho con este método (coeficientes fraccionarios o irracionales) y que haga que el alumno vea que necesita alguna técnica adecuada para resolverlo. Esto puede justificar la introducción de determinantes en la unidad tres.

2. Con respecto a la noción de rango de una matriz, creemos que el texto usa un procedimiento muy largo para introducir este concepto, así como las técnicas de cálculo, lo cual puede ocasionar conflictos al estudiante para interpretar adecuadamente. En espe-

cial, no vemos claro el hecho de presentarlo primero en la unidad de matrices, calculándolo con el método de Gauss, y después en la unidad de determinantes, calculándolo a partir de los menores de la matriz. Además, en este último apartado se define rango como el máximo orden de los menores no nulos y se intenta justificar con la definición dada en la unidad anterior y con la propiedad 9 de los determinantes, lo cual puede crear dificultades en los alumnos.

3. Como puede deducirse del análisis realizado, el texto no presenta apenas ejemplos contextualizados, intentando compensarlo con cantidad de "ejercicios resueltos", que ilustran todas las técnicas presentadas en la teoría. El hecho de que las propiedades de los determinantes se intenten justificar mediante ejemplos y no de manera abstracta (Gascón, 1998, considera que la desaparición de las justificaciones algebraicas es una cuestión importante a estudiar por la didáctica de las matemáticas), puede resultar pertinente, dado que el manual va dirigido a estudiantes con un nivel matemático bajo. No obstante esto no ha de hacernos olvidar que en este curso se ha de introducir al alumno en un cierto rigor a la hora de definir los conceptos, acercándolo al conocimiento formal necesario, potencialmente, para sus estudios futuros.

4. En ciertos momentos del proceso de estudio parecería necesario la aclaración de determinados conceptos, que se consideran conocidos por el alumno. Sin embargo, el conocimiento de base del estudiante puede que no le capacite para su total comprensión, presentando en ese momento un conflicto cognitivo. Ponemos como ejemplo el caso del concepto de permutación y número factorial que, aunque se supone estudiado por el alumno no tiene porqué ser así. De hecho, el estudio de la combinatoria y los números factoriales no aparece en el currículo de la ESO ni de 1º de Bachillerato, por lo que en el proceso de estudio se está poniendo en juego una noción que no ha sido introducida anteriormente, y que tampoco se considera objeto de estudio en este momento.

5. En la actividad matemática hay siempre una tendencia hacia la generalización, a considerar problemas y técnicas cada vez más globales que resuelvan el mayor número posible de tipos de problemas. Esto lleva al uso de variables, instrumentadas en notaciones y convenios generales.

En las unidades analizadas, en general, nos parece pertinente la notación utilizada por el libro de texto. No obstante, el uso de las notaciones $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para referirnos a los elementos del espacio vectorial, nos parece un tanto confusa. El alumno de 2º de Bachillerato identifica la notación $\vec{u}$ con un vector del plano. Además, en los cursos de 4º de

ESO y 1º de Bachillerato, especialidad de Ciencias de la Naturaleza y la Salud y Tecnología, que es donde se estudian los vectores en el plano, se recalca al alumno la importancia de colocar la flecha para así distinguir los números de los vectores. Por tanto, en el instante que se dice que las matrices forman un espacio vectorial se puede generar un conflicto semiótico, ya que en ningún momento se ha denotado una matriz o n-upla poniendo una flecha.

Consideramos que el uso de esta notación puede dificultar el desarrollo del razonamiento abstracto que se pretende ir construyendo progresivamente.

6. Se detecta, con demasiada frecuencia, una ausencia de justificación de algunas de las propiedades mencionadas, como por ejemplo que el producto de matrices no es conmutativo. En este caso se ponen ejemplos en los “ejercicios resueltos”, pero se pide al lector que compruebe él mismo la propiedad con algunos ejemplos. El texto menciona que $A \cdot B \neq B \cdot A$ pero no que hay casos en los que podemos calcular AB pero no BA, o en los que AB y BA tienen distinta dimensión.

También falta justificación en el caso de la matriz inversa. Se menciona que no todas las matrices tienen inversa, pero se deja la argumentación para dos temas más adelante. No se justifica el hecho de que no exista matriz inversa en todos los casos.

7. Falta un apartado que contextualice qué tipo de problemas pueden resolverse utilizando estos objetos matemáticos. Aunque la resolución de problemas usando el Álgebra Lineal no es un contenido específico del currículo de 2º de Bachillerato, no estaría de más hacer una pequeña mención de la utilidad de estos contenidos dentro del campo de otras ciencias o de la propia matemática. Tan sólo encontramos algún ejemplo práctico, que podría ser clasificado como problema, en el tema de Álgebra de Matrices, en los apartados “para empezar, reflexiona y resuelve” y “ejercicios propuestos”. Construir la teoría matemática necesaria para resolver problemas planteados ayuda al alumnado a comprenderla mejor (Mercado, 2003).

A lo largo del desarrollo del curso el alumno verá aplicaciones del Álgebra Lineal en el campo de la Geometría, ya que estudiará posiciones relativas de rectas y planos en el espacio y producto vectorial y mixto de vectores. Quizás alguna referencia a esto en los contenidos teóricos de Matrices y Determinantes sería de gran utilidad para el estudiante ya que le permitiría dar un sentido a aquello que estudia de manera abstracta, y sin percibir sus “sentidos” (Font, 2005).

El contenido matemático “matrices de dimensión $m \times n$” queda caracterizado por la estructura de espacio vectorial. El texto presenta como otros espacios vectoriales R^2, R^3,

R^4 y, en general, R^n, conjunto que no resulta conocido para el estudiante. Sin embargo, no se hace mención a espacios vectoriales y utilizados por el alumnado en cursos anteriores, como pueden ser las funciones reales de variable real o los polinomios con coeficientes en R. Comparando las propiedades de la definición de espacio vectorial con las de los objetos antes mencionados, el alumno podría comprobar que realmente ya conocía el concepto de espacio vectorial, aunque nunca había estudiado su aspecto estructural.

Somos conscientes, sin embargo, que por restricciones de tiempo y conocimientos previos de los estudiantes, pretender en este nivel educativo presentar las distintas estructuras (grupo, anillo, espacio vectorial,…) como una organización matemática unificadora (Bolea, Bosch, Gascón, 2001) de distintas ramas de las matemáticas, es un objetivo que no se pude lograr. No obstante, el texto presenta otro ejemplo de espacio vectorial, dándole este nombre, al estudiar los vectores en el espacio (pag 133).

Los contenidos matemáticos correspondientes a Matrices y Determinantes se caracterizan por la gran utilidad que tienen estos términos para el Álgebra y organizaciones afines (en particular, para la geometría, la estadística y el análisis matemático).

Las componentes situacionales encontradas en el texto se centran principalmente en presentar ejemplos de los diferentes conceptos estudiados y, sobre todo, de las diferentes técnicas estudiadas.

8. En relación con la dimensión actuativa, técnica u operatoria ésta está presente en los procedimientos empleados para usar las técnicas de las diferentes operaciones que se pueden realizar con matrices y el cálculo de determinantes de diferentes formas. Se echaría de menos, una vez más, el uso de esta componente en la deducción del proceso a seguir para resolver los problemas de aplicación a la vida cotidiana, usando las nociones estudiadas, en especial en el tema de Determinantes. Esto coincide con lo afirmado por Rodríguez (1999), sobre que las actividades planteadas en este tema se centran en las operaciones con matrices.

9. La componente proposicional y validativa relaciona las características de los conceptos de matriz y determinante. Se hace especial hincapié en las condiciones que han de cumplir las matrices para que se puedan sumar y multiplicar, en las propiedades de las operaciones con matrices y en aquellas propiedades que ayudan a comprender mejor el concepto de rango. A esto último se hace también mención en el tema de Determinantes, insistiendo asimismo en las propiedades de estos objetos.

10. La componente argumentativa es más parca que las demás componentes, en particular la proposicional, ya que la mayoría de las proposiciones y propiedades enunciadas se justifican a través de ejemplos. Encontramos pocas justificaciones de técnicas apoyadas por la componente teórica (tecnologías y teorías) (Chevallard, 1999) Hemos de recordar que las demostraciones teóricas no son objeto de evaluación en las Pruebas de Acceso a la Universidad, pero, aun así, se podrían aportan justificaciones, aunque fueran de carácter intuitivo.

Capítulo 6.
Significados personales de los alumnos de 2º de Bachillerato relativos al Álgebra Lineal.

6.1- *Introducción.*

Esta parte del trabajo consiste en un estudio realizado con un grupo de estudiantes de 2º de Bachillerato, con la finalidad de caracterizar los significados personales de estos alumnos con respecto a nociones básicas de Álgebra Lineal.

Para ello usaremos la noción de significado personal en el sentido de Godino y Batanero (1994b, 1998a) como el sistema de prácticas (actuativas y discursivas) manifestadas por un sujeto ante una cierta clase de tareas. Estas expresiones servirán de indicador de los aprendizajes logrados, así como de las dificultades y conflictos semióticos, juzgados desde el punto de vista institucional.

En nuestro caso las tareas que vamos a proponer implican cuestiones propuestas en pruebas de selectividad, ejercicios que utilizan la notación matricial, ejercicios de aplicación del cálculo matricial, ejercicios de cálculo matricial, propiedades de los determinantes y modelización algebraica de problemas de enunciado.

En el desarrollo de este capítulo describiremos brevemente el contexto instruccional donde nos encontramos, la metodología empleada y la muestra utilizada. También describiremos con más detalle el análisis e interpretación de los datos recabados en la investigación, relativos a las respuestas obtenidas en 167 exámenes, correspondientes a 73 alumnos de 2º de Bachillerato, y a las respuestas dadas por dos estudiantes de la muestra en una entrevista.

No consideramos posible reducir el proceso de evaluación a la clasificación de los sujetos según una escala numérica. Para nosotros es el aspecto cualitativo del conocimiento del individuo el que verdaderamente nos proporciona un informe sobre los significados personales del sujeto en los cuales debemos diferenciar el conjunto de invariantes que el sujeto atribuye al objeto como notas esenciales que los determinan, el conjunto de representaciones semióticas que emplea en relación al objeto y el conjunto de situaciones para las cuales el sujeto considera apropiado el empleo del objeto dado, tanto desde el punto de vista relacional como instrumental.

6.2- *Contexto Instruccional.*

El contexto instruccional del estudio cognitivo realizado está asociado al desarrollo del curso de 2º de Bachillerato, años 2003-04 y 2004-05, con alumnos del IES Monte da Vila de O Grove, 31 correspondientes al año académico 2003-04, 33 al curso 2004-05 y 9 al curso 2005-06. Este instituto es el único que posee esta villa, de aproximadamente once mil habitantes, donde se imparte Bachillerato. El curso de 2º de Bachillerato, como hemos mencionado varias veces a lo largo de este trabajo, es el único en el que se estudian matrices y determinantes.

La asignatura de Matemáticas II es obligatoria para algunos alumnos y optativa para otros que cursan la especialidad de Ciencias de la Naturaleza y la Salud, mientras que la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II es obligatoria para aquellos alumnos que opten por la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales. A la hora de realizar este estudio se cogió a estudiantes que estaban en los tres casos citados, con el fin de obtener una muestra más representativa.

La profesora que imparte las clases es la propia investigadora, lo cual posibilitó adecuar la prueba a los alumnos, aun teniendo en cuenta la programación del centro. Dicha programación también fue elaborada por la investigadora, para lo cual se siguió lo marcado en el DOGA, Decreto 233/2002, de 6 de junio, sobre el currículo de 2º de Bachillerato, y las instrucciones propuestas por la Comisión Interuniversitaria Galega en estos años. Tanto el currículo como las instrucciones de la CIUG fueron las mismas en los tres cursos mencionados.

6.3- *Metodología.*

6.3.1- Enfoque Metodológico.

Esta faceta de nuestra investigación puede clasificarse en los métodos centrados en la enseñanza y aprendizaje de los alumnos, según el curso de Doctorado: Diseño de Investigaciones Educativas en Ciencias y Matemáticas, impartida por la Dra. Carmen Batanero Bernabeu, correspondiente al programa de Doctorado del Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de la Matemática de la Universidad de Santiago de Compostela, Bienio 2002-04.

Realizaremos una prueba de evaluación a unos estudiantes para intentar determinar los aprendizajes logrados e identificar, las dificultades y conflictos con los objetos y organizaciones matemáticas estudiadas.

Además, para investigar esta faceta del problema (significados personales de los estudiantes) utilizaremos principalmente el enfoque cuantitativo de tipo descriptivo. Por otro lado, y puesto que el enfoque cuantitativo nos indica las tendencias muestrales, pero no toda la riqueza de la variabilidad individual, ni explica el porqué de la misma, vamos a complementar el estudio mediante técnicas de análisis cualitativo.

El estudio de casos mediante entrevista clínica nos va a permitir caracterizar con más detalle las dificultades y grados de comprensión logrado por dos estudiantes de nuestra muestra. Evidentemente, al realizarse el estudio cualitativo con muestras de tamaño reducido su carácter es exploratorio y está orientado a la formulación de hipótesis que deben ser contrastadas con nuevas investigaciones.

Quizás se eche de menos una experiencia didáctica en el aula que permitiera la obtención de nuevos datos que ayudasen a detectar posibles conflictos semióticos. Una experiencia diseñada a partir de situaciones-problema sería muy enriquecedora para ver cómo aborda el alumno el lenguaje y los conceptos matemáticos y cómo dirige sus acciones a la hora de resolverla. Sin embargo, el criterio que ha primado a la hora de realizar esta investigación ha sido no interrumpir al alumno en ningún momento en su proceso de estudio. La presión de la Selectividad, casi desde el primer día lectivo, hace que el alumno no demuestre el menor interés en nada que lo aparte de los contenidos de dicha prueba, por lo que nos pareció más oportuno analizar las pruebas reales que realizan los estudiantes, sin hacer nada que se salga del día a día del trabajo en el aula.

6.3.2- Población y Muestra.

La población objeto de estudio serán los estudiantes de 2º curso de Bachillerato, en su mayoría de la especialidad de Ciencias de la Naturaleza y la Salud, aunque hay algunos de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. Para algunos de estos alumnos la materia es propia de la modalidad y para otros no, lo cual significa que no todos tendrán que examinarse de ella en Selectividad.

La muestra ha sido tomada en el IES Monte da Vila de O Grove (Pontevedra), durante los cursos 2003-04, 2004-05 y 2005-06. El estudio se realizará con 73 alumnos que contestarán a un total de 167 exámenes.

6.3.3- Instrumentos de Evaluación.

Los instrumentos de recogida de datos utilizados en este aspecto de la investigación fueron los exámenes realizados por los alumnos y la entrevista clínica. En este apartado desarrollaremos en qué consisten estas herramientas y con qué propósitos se aplicaron.

6.3.3.1. Exámenes de los alumnos.

En Ferro (2004), estudio previo a este trabajo, se utilizó un cuestionario, una vez concluida la enseñanza del tema, y fue pasado a los alumnos en dos momentos diferentes del proceso de enseñanza-aprendizaje. El cuestionario es un instrumento que nos permite recoger datos de una muestra relativamente amplia de sujetos y de una variedad de conocimientos de forma rápida. Sin embargo, la actitud de los estudiantes cara al cuestionario no fue en absoluto positiva. Este curso tiene unas características muy especiales, marcadas sobre todo por el examen de Selectividad, y se comprobó que los alumnos sólo toman en serio una actividad cuando ésta es objeto de examen o preparatoria para el examen de Selectividad. De hecho cuando se han planteado diferentes actividades "no objeto de examen", tanto en la asignatura de matemáticas como en otras materias, los alumnos han optado por no ir a clase.

Este trabajo sirvió como muestra piloto. A través de la experiencia obtenida por una parte, en la organización de su ejecución y, por otra, en el análisis de los resultados, pudimos rectificar el planteamiento tomado inicialmente sobre la recogida de datos.

Hay que destacar que partíamos de una limitación evidente debido a que no había material de investigación que avalase la elección de los posibles ítems. Tanto en la primera elección de los ítems como en la elección definitiva de la prueba final se tuvieron en cuenta:

- El estudio de una muestra significativa de libros de texto de 2º de Bachillerato.
- Exámenes propuestos de selectividad.
- Los años de experiencia de la investigadora impartiendo 2º de Bachillerato y observando los problemas de comprensión presentados por los alumnos, así como comentarios al respecto realizados por otros profesores de secundaria.
- El diseño curricular marcado por las autoridades educativas.

Al tratarse de un estudio principalmente cualitativo hemos preferido elegir una muestra intencional en la que los estudiantes intentaran responder a las preguntas realizando un esfuerzo por resolver las actividades propuestas, motivados por el valor intrínseco, para ellos, de los resultados de la prueba.

Por esta razón hemos considerado que el instrumento más fiable de recogida de datos es el propio examen, ya que es en la única situación en la que el alumno se esfuerza al máximo en contestar correctamente. Se puede plantear que el examen es una variante del cuestionario. Además, no es un instrumento estructurado totalmente pues, aunque las cuestiones son las mismas para todos los alumnos, se trata de cuestiones con respuesta abierta. Con ellas intentaremos estudiar el repertorio de posibles argumentaciones que los alumnos son capaces de expresar en las justificaciones de sus respuestas, lo que nos permitirá inferir sus concepciones acerca de los conceptos de matriz y determinante.

Estamos ante una investigación de tipo descriptivo, evaluativo y comparativo. Los datos fueron recogidos personalmente por la investigadora. Hay que señalar como dato importante que se tomaron cuestiones realizadas antes de tomar la decisión de cambiar los cuestionarios por los exámenes, para así evitar que las preguntas de los exámenes se adaptaran a la investigación. Es la investigación la que debe adaptarse a los exámenes que realmente se realizan en el aula y no al revés. Es decir, la investigadora evaluó a sus alumnos de 2º de Bachillerato sin estar influidos por la elección de esos mismos exámenes como instrumento de investigación.

Pero el estudio de estos exámenes tiene una dificultad añadida con respecto al cuestionario. El cuestionario es único, por lo que cada ítem es pasado al mismo número de alumnos. Sin embargo, nos encontraremos con 16 pruebas diferentes. Por razones obvias no se puede utilizar el mismo examen durante tres años distintos y con grupos diferentes cada año. En total tenemos los siguientes:

Curso 2003-04: 1 grupo de Matemáticas II: 4 exámenes.

1 grupo de Matemáticas Aplicadas II: 3 exámenes.

Curso 2004-05: 2 grupos de Matemáticas II: 3 exámenes por grupo.

Curso 2005-06: 1 grupo de Matemáticas II: 3 exámenes

En total se analizarán 167 pruebas realizadas por 73 alumnos. Es obvio también que si analizamos cada pregunta de cada examen individualmente tendríamos una gran cantidad de ítems pero con muy pocas respuestas (como mucho cada pregunta sería contestada por 23 alumnos), y además hay muchas cuestiones que sólo se diferencian en algún dato numérico, por lo que hemos decidido clasificar los ítems en siete grupos y analizarlos por separado. Dichos grupos corresponden a las variables que nos interesa estudiar en la construcción de significados de los alumnos: presentación y comprensión de conceptos, técnicas algorítmicas, resolución de problemas y aplicación del Álgebra Lineal. El tamaño de la muestra variará para cada grupo de ítems. Estos grupos son los siguientes:

Grupo 1: Preguntas de Selectividad.

Grupo 2: Ejercicios que utilicen la notación matricial.

Grupo 3: Ejercicios de aplicación del cálculo matricial.

Grupo 4: Ejercicios de cálculo matricial.

Grupo 5: Propiedades de los determinantes.

Grupo 6: Modelización algebraica de problemas de enunciado.

Grupo 7: Preguntas teóricas.

A continuación presentamos los propósitos y el análisis de contenido de estos grupos de preguntas. Como cada conjunto comprende varios ítems pondremos un ejemplo en cada uno siendo el resto de los ítems similares a los presentados como ejemplo.

Grupo 1

Resolver AX+B = 2C: $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

El propósito de este ítem es evaluar en el alumno la capacidad que tiene para resolver ejercicios similares a los propuestos en los exámenes de selectividad. En estas tareas el alumno no ha de demostrar que entiende el significado de los objetos presentados, sino que maneja adecuadamente las técnicas necesarias para afrontar con éxito este tipo de problemas, frecuentes en las pruebas de acceso a la universidad.

Consideramos que la respuesta es correcta cuando el alumno llega a la solución pertinente empleando las técnicas adecuadas.

Ítems pertenecientes a este grupo: 10

Tamaño de la muestra: N = 111

Grupo 2

Demostrar que en el conjunto de las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*, el producto es conmutativo.*

El propósito de este ítem es detectar si los alumnos manejan la notación matricial y son capaces de tratar el objeto matriz sin que el ejercicio necesite de un algoritmo determinado para realizarlo. Aparecerán en este grupo todas aquellas actividades abstractas que requieran demostraciones de resultados con matrices.

Consideramos que la respuesta es correcta cuando los estudiantes aplican correctamente las definiciones y propiedades de estos objetos para demostrar o inferir aquello que se pide en la actividad. También nos interesa analizar las argumentaciones que emplean en la justificación de sus respuestas.

Ítems: 18

Tamaño de la muestra: N = 197

Grupo 3

Una fábrica produce tornillos de longitudes 1, 3, 7cm y tienen 4 clientes: Andrés, Juan, Lucas y Pedro. Durante el mes de enero vendió a Andrés 9 cajas de tornillos de 1cm, 5 cajas de 3cm y 2 cajas de 7cm; a Juan 3 cajas de 1cm y 8 cajas de 3cm, a Lucas no se le vendió nada y a Pedro, 6 cajas de 1cm, 7 cajas de 3cm y 1 caja de 7cm.

Durante el mes de febrero las ventas fueron: a Andrés 5, 2 y 3 cajas de tornillos de 1, 3 y 7cm respectivamente; a Juan 6 cajas de cada tipo; a Lucas sólo 4 cajas de 1cm y Pedro este mes no compró ninguna.

a) Construye las matrices que expresan las ventas en los meses de enero y febrero.

b) Ayudándote de las matrices anteriores calcula la matriz de ventas conjuntas de enero y febrero.

c) Escribe la matriz que refleje la variación de las ventas de febrero en relación con las de enero.

El propósito de este ítem es observar si el alumno domina estrategias de reconocimiento, en una situación práctica, los objetos matemáticos que debe emplear en la resolución de un determinado problema.

Consideramos que la respuesta es correcta cuando los estudiantes utilizan razonadamente la notación matricial en el contexto correspondiente.

Ítems: 3

Tamaño de la muestra: N = 62

Grupo 4

Discutir el sistema: $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$

El propósito de este ítem es detectar en el alumno la disponibilidad de conocimientos, técnicas y habilidades para realizar operaciones con matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. Incluiremos en este grupo únicamente aquellas preguntas que requieran sólo el uso de los algoritmos, siendo normalmente la técnica utilizada el método de Gauss.

Las respuestas correctas se presentan cuando los estudiantes realizan las operaciones planteadas en el ejercicio, considerándose también válidas cuando utilizan el procedimiento correcto pero se equivocan en una operación elemental (por ejemplo 2+3 = 6), por considerar esos errores producto de la presión del examen, pero que en el nivel que están los alumnos se consideran “despistes”.

Ítems: 47

Tamaño de la muestra: N = 562

Grupo 5

Calcula: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

El propósito de este ítem es observar la forma en que el alumno operativiza y manipula las propiedades de los determinantes. Incluiremos tanto ejercicios de cálculo, como el que presentamos, como aquellos donde haya que averiguar o demostrar algún resultado.

Las respuestas correctas serán aquellas que presenten un dominio de dichas propiedades, incidiendo especialmente en no confundir propiedades de los determinantes y las matrices.

Ítems: 20

Tamaño de la muestra: N = 277

Grupo 6

Calcular tres números que cumplan las condiciones siguientes:

a) El primero es la suma de los otros dos.

b) El segundo es igual a la mitad del primero más el doble del tercero.

c) La suma de todos es 6.

El propósito de este ítem es evaluar la capacidad del alumno para modelizar algebraicamente una situación-problema. Se incluirán aquí lo que los textos llaman “problemas de enunciado”.

Las respuestas correctas se presentan cuando el estudiante construye el modelo adecuado y, además, aplica correctamente las técnicas necesarias para alcanzar la solución.

Ítems: 10

Tamaño de la muestra: N = 113

Grupo 7

Producto de matrices. Condiciones para su realización. Es posible que para dos matrices A y B no cuadradas existan AB y BA?

El propósito de este grupo de ítems es detectar posibles errores y debilidades en la comprensión de los conceptos teóricos. Se vigilará especialmente si el alumno da respuestas institucionales, es decir, si se limita a plasmar en el examen aquello que memorizó de sus notas, si es capaz de desarrollar respuestas personales o si hacen referencia a ejemplos numéricos. Nos interesa averiguar cuáles son los recursos personales que manejan los estudiantes para aclarar suficientemente lo que ellos entienden por los conceptos de que se les examina y cuál es el lenguaje que utilizan. Esto nos permitirá estudiar los objetivos representacionales (Godino, 2003b), es decir, comprobar si el sistema interno de representación del estudiante coincide con el sistema externo utilizado en la clase de matemáticas.

Las preguntas teóricas extraídas de exámenes de selectividad se incluirán en este grupo, en vez de en el apartado 1.

Las respuestas se considerarán correctas cuando los estudiantes argumenten sus respuestas de acuerdo con el concepto o la propiedad correspondiente, valorando especialmente la utilización de un lenguaje simbólico frente al lenguaje común. De todas formas, hemos de considerar, en este grupo, que el alumno se referirá en todo momento a objetos institucionales, es decir, presentará los objetos matemáticos de manera similar a lo estudiado en clase.

Ítems: 6

Tamaño de la muestra: N = 56

6.3.3.2. Justificación de la validez de contenido del instrumento de evaluación.

Como hemos indicado, nuestro instrumento de evaluación se engloba en el método de medición donde tratamos de evaluar un constructo (los conocimientos de los alumnos que interpretamos como significados personales) mediante un conjunto de indicadores empíricos (las respuestas a los exámenes). Para permitir este proceso el instrumento de evaluación debe cumplir los requisitos de validez (Arrieche, 2002), la cual se refiere a la relación del instrumento con el constructo que se quiere medir, es decir, a la ausencia de sesgo sistemático.

Decimos que la prueba tiene validez de contenido si se puede razonar que mide lo que pretende, esto es, porque existe una base lógica en la elección del contenido real del instrumento (Ruiz, 1993). Este contenido es representativo de la población de contenidos que se trataba de evaluar. Para probar la validez del contenido el investigador debe probar que conoce el universo o población de contenidos y que ha tomado una muestra representativa para elaborar el instrumento.

En Ferro (2004) se ha realizado un estudio piloto mediante un cuestionario formado por diversos ítems seleccionados tras una recopilación inicial de diversos ejercicios y problemas, así como de ítems de otras investigaciones. En la selección de estos ítems se tuvo en cuenta su adecuación a los objetivos de la investigación

Sin embargo, en este caso no se ha elaborado ningún instrumento sino que se analizaron actividades realizadas previamente por los alumnos. Por tanto, debemos analizar si estos exámenes evalúan los posibles contenidos impartidos en el curso. Para realizar un examen, la profesora toma ejercicios y problemas incluidos en diferentes libros de texto y en exámenes de selectividad. Por norma general, cada prueba incluye una pregunta fácil, que pueda contestar toda la clase, y otra bastante complicada, pensada para detectar conocimientos más elaborados y complejos. Según la mayor o menor facilidad o dificultad de estas dos preguntas su puntuación es de 1 o 2 puntos. El resto del examen son actividades de dificultad normal según el criterio de la profesora. El tiempo dado para constestar el examen es entre 50 y 65 minutos.

Con esta experiencia tratamos de evaluar el aprendizaje de los alumnos sobre objetos básicos del Álgebra Lineal: notaciones, procesos, técnicas, conceptos, propiedades, argumentos, que hayan sido objeto de instrucción. En las siguientes tablas mostraremos el contenido evaluado por el instrumento:

Tabla 6.3.3.2.1: Contenido evaluado por los exámenes 1-8

	Ex 1	Ex 2	Ex 3	Ex 4	Ex 5	Ex 6	Ex 7	Ex 8
Notación matricial	x				x	x	x	
Tipos de matrices				x	x		x	
Operaciones con matrices	x		x	x	x			x
Rango de una matriz	x							x
Cálculo de determinantes	x				x	x	x	
Propiedades de los determinantes	x				x	x	x	
Matriz inversa	x	x	x	x	x	x	x	
Discusión de un sistema	x			x		x	x	x
Resolución de sistemas	x	x	x	x		x	x	x
Método de Gauss	x	x	x	x		x	x	x

Tabla 6.3.3.2.2: Contenido evaluado por los exámenes 9-16

	Ex 9	E 10	E 11	E 12	E 13	E 14	E 15	E 16
Notación matricial							x	
Tipos de matrices						x		
Operaciones con matrices	x	x	x	x	x	x	x	x
Rango de una matriz		x	x					
Cálculo de determinantes				x	x	x	x	x
Propiedades de los determinantes		x		x	x	x	x	x
Matriz inversa	x	x		x	x	x	x	x
Discusión de un sistema		x	x	x	x		x	
Resolución de sistemas	x	x	x	x	x		x	x
Método de Gauss	x	x		x	x	x	x	x

Como podemos observar, las pruebas evalúan todos los objetos matemáticos presentados durante el proceso de estudio descrito. Los alumnos, en estos exámenes, han de resolver problemas propuestos en las Pruebas de Acceso a la Universidad, han de definir, argumentar, probar, diseñar procesos, aplicar técnicas y realizar cálculos. Consideramos por tanto que el instrumento tiene validez de contenido para evaluar los conocimientos de los estudiantes sobre matrices y determinantes.

6.3.3.3. Entrevista

Después de haber valorado los resultados de los exámenes en el curso 2004-2005, se seleccionaron dos estudiantes para realizarles una entrevista. La condición exigida era que fuesen colaboradores y comunicativos. Una vez escogidos, resultaron ser dos alumnas, que obtuvieron calificación de 9. Aunque se hubiera preferido alumnos con calificaciones diferentes, las alumnas se seleccionaron entre un grupo de alumnos voluntarios (no se presentaron demasiados) que tenían buenas calificaciones. Se dio prioridad a la capacidad de comunicación de los alumnos antes que a su calificación.

La entrevista se realizó con la finalidad de completar la información requerida sobre los significados evaluados en cuestiones que no se trataron en los exámenes, tales como opiniones generales sobre la importancia del tema y, también, para aclarar algunas respuestas dadas en las pruebas.

Se trata de una entrevista semiestructurada, ya que a pesar de utilizar un guión, se fueron introduciendo modificaciones según las respuestas de las alumnas, con el fin de aclarar sus opiniones. La convversación, mantenida con ambas al mismo tiempo, fue gradaba en audio y posteriormente transcrita, y tuvo una duración aproximada de 45 minutos. La entrevistadora ya conocía a las alumnas entrevistadas y se pudo lograr un ambiente agradable y tranquilo, utilizando un lenguaje adecuado a las alumnas. El análisis de esta entrevista se desarrollará de forma detallada en la sección 6.5.

6.4- *Análisis de Datos. Discusión de Resultados.*

Con el propósito de describir las características de los significados personales con respecto al Álgebra Lineal en los alumnos de 2º de Bachillerato, en esta sección presentaremos los resultados globales del análisis de los exámenes, mediante tablas de frecuencias y porcentajes de respuestas de cada uno de los grupos de preguntas estudiadas con sus respectivas interpretaciones. Se combinará un análisis cuantitativo con uno cualitativo.

Hemos clasificado las respuestas elaboradas en correctas, parcialmente correctas, incorrectas y respuestas en blanco (cuando el alumno no responde o su respuesta es insuficiente para entender su significado). En la sección 6.3.3.1 se analizaron los tipos de respuestas correctas en cada grupo y en esta, presentaremos ejemplos de respuestas parcialmente correctas e incorrectas dadas por los alumnos.

Basándonos en los resultados obtenidos en nuestro trabajo de investigación (Ferro, 2004), así como en las aportaciones de otros estudiosos tales como Ruiz (1993), teníamos ya elaborada una primera categorización de las posibles argumentaciones, pero la clasificación definitiva la hemos construido a partir del análisis de las respuestas de los alumnos a los exámenes.

6.4.1- Resultados globales de la prueba.

A continuación presentamos los resultados de cada uno de los grupos de ítems que conformaron los exámenes, con ejemplos de respuestas parcialmente correctas e incorrectas y sus respectivas interpretaciones, fundamentadas en la clasificación elaborada.

Grupo 1: Preguntas de Selectividad

Las respuestas parcialmente correctas se dan cuando el estudiante utiliza términos inadecuados o escribe respuestas incompletas con errores de cálculo o expresión; sin embargo su técnica de resolución es, en general, acertada. Como ejemplo, tomaremos las siguientes respuestas tomadas literalmente de los alumnos:

Examen 5. Pregunta 1 / Examen 12. Pregunta 3 / Examen 13. Pregunta 2

Sea $A+B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, $A\text{-}B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. *Calcular* $A^2\text{-}B^2$.

Respuestas:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} - B \quad , \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + B$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + B \Rightarrow 2B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{25}{4} & \frac{25}{4} \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{B}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 16 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que el alumno plantea correctamente el problema: por no ser conmutativo el producto de matrices no puede calcular A^2-B^2 haciendo (A+B)(A-B), sino que ha de resolver el sistema. Sin embargo, se considera parcialmente correcta porque comete un error al hacer A^2 y B^2, ya que eleva al cuadrado cada término de A y B.

En el siguiente ejemplo el alumno también llega al resultado correcto de A y B (exceptuando un error simple de cálculo: 7+1 = 6), pero lo expresa de la siguiente manera:

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 55 & 25 \\ 30 & 30 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$$

El error aparece al calcular A^2-B^2.

$$A^2 - B^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 55 & 25 \\ 30 & 30 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & 26 \\ 24 & 36 \end{pmatrix}$$

Además de escribir $\frac{1}{2}$ en vez de $\frac{1}{4}$, efectúa la resta sin multiplicar por este número.

En el mismo sentido tenemos otro alumno que calcula correctamente A pero, al calcular B, omite el $\frac{1}{2}$ que multiplica a la matriz a la hora de hacer la resta.

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Otra práctica frecuente es abandonar la situación, a media respuesta: el alumno resuelve el sistema y llega a las soluciones correctas de A y B, pero después se "olvida" de hacer el último cálculo A^2-B^2. Estos errores los encontramos a menudo en problemas "largos" donde es preciso hacer cálculos previos para llegar al resultado final; el estudiante se centra en realizar esos cálculos y considera acabado el ejercicio cuando finaliza estos, olvidándose de la meta perseguida.

<u>Examen 9. Pregunta 2</u>

Resolver AX+B = 2C, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En el siguiente razonamiento el alumno comete un error de escritura:

AX+B =2C $\Rightarrow$ AX = 2C-B $\Rightarrow$ A^{-1}AX = A^{-1}·2C-B $\Rightarrow$ I·X = A^{-1}·2C-B, aunque lo que realmente calcula es A^{-1}(2C-B), que es lo correcto.

Las respuestas se consideran incorrectas cuando se cometen alguno de los errores que se describen a continuación:

<u>Examen 5. Pregunta 2</u>

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$*, halla una matriz X tal que AX+B = 0.*

El error del alumno viene al despejar X: X = -B·A^{-1} , lo que muestra desconocimiento de las propiedades de las operaciones con matrices (en este caso, no se tiene en cuenta que el producto de matrices no es conmutativo).

El mismo tipo de error se da en la primera pregunta del examen 5, vista anteriormente:

(A+B)(A-B) = A^2-B^2

<u>Examen 3. Pregunta 2</u>

Hallar la matriz X tal que AX = B+2C, siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\9&3&-3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&0\\3&4&5\end{pmatrix}$$

En este caso el alumno no multiplica por la inversa, sino por la propia matriz A:

$AX = B+2C \Rightarrow A^{-1}AX = B+2C \Rightarrow X = A(B+2C)$

En el caso siguiente el alumno no sabe despejar la X; calcula B+2C, solamente:

$$AX=\begin{pmatrix}3&2&1\\4&6&0\\15&11&7\end{pmatrix}$$

y así concluye el ejercicio.

<u>Examen 15. Pregunta 4.</u>

Resolver AX-B = C: $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\end{pmatrix}$

En este caso el error del alumno consiste en no saber cuál es el orden de la matriz X:

$$\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\end{pmatrix}$$

Después de hacer cálculos llega a:

$$\begin{pmatrix}2x-y\\x+3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2x-y=5\\x+3y=5\end{cases}$$

En la siguiente tabla observamos la frecuencia y el porcentaje de respuestas a los ítems del grupo 1:

Tabla 6.4.1.1: Frecuencia y porcentaje de respuestas del grupo 1.

	Frecuencia	**Porcentaje**
Correctas	49	44,1%
Parcialmente correctas	33	29,8%
Incorrectas	20	18%
En blanco	9	8,1%
<u>**Total**</u>	111	100,0%

Estas respuestas parecen indicar que los problemas de selectividad planteados no resultaron ser preguntas difíciles, ya que sólo el 18% dio una respuesta incorrecta y el 8,1% la dejó en blanco. Se han considerado respuestas parcialmente correctas aquellas que presentan errores de cálculo simples (por ejemplo, equivocarse en los cálculos de una multiplicación de matrices) y también todas aquellas que presentan razonamientos correctos pero que, llegados a un punto, no saben seguir. Consideramos respuestas incorrectas a las que muestran procedimientos o empleo de técnicas incorrectas y las que sólo han resuelto una parte ínfima del ejercicio.

Grupo 2: Ejercicios que utilizan la notación matricial.

Las respuestas parcialmente correctas se dan cuando los alumnos cometen los errores que se describen a continuación:

<u>Examen 15. Pregunta 1 / Examen 1. Pregunta 8 / Examen 10. Pregunta 3.</u>

Demostrar que en el conjunto de las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*, el producto es conmutativo.*

El alumno comprueba la tesis en un caso particular:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Examen 5. Pregunta 3 / Examen 6. Pregunta 1.</u>

Si $A = (a_{ij}) = 2i\text{-}j$ *y* $B = (b_{ij}) = |i - j|$ *y ambas pertenecen a* $M_{3\times 3}$*, se pide:*

a) Escribe las matrices A y B.

b) ¿Son simétricas?

c) Escribir A^T *y* B^T*.*

El error del alumno proviene de confundir la notación de matrices y determinantes:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

cometiendo el mismo error al escribir B, A^T y B^T.

Además, en el apartado b, el alumno da la siguiente respuesta: "*Só a matriz B ten inversa*", confundiendo el concepto de matriz simétrica con el de matriz inversible.

En el siguiente ejemplo también encontramos un problema de notación:

$$B = \left| \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El alumno quiere escribir el valor absoluto de cada uno de los elementos de la matriz que se obtiene al restar los subíndices *i* y *j*, y para ello escribe toda la matriz dentro de las barras de valor absoluto, cometiendo un error de notación, aunque consigue el resultado correcto.

Otro error en este ejercicio es señalar que la matriz B es simétrica pero que A es antisimétrica, confundiendo los conceptos de matriz simétrica y antisimétrica.

Las respuestas se consideran incorrectas si se comete alguno de los errores que se describen a continuación:

"*La única simétrica es B porque su traspuesta es igual a su determinante*".

En este caso no tenemos una mera confusión de definiciones, sino que el alumno confunde los conceptos de matriz y determinante.

<u>Examen 1. Pregunta 8 / Examen 10. Pregunta 3 / Examen 15. Pregunta 1</u>

El alumno calcula la potencia n-ésima en vez de responder a lo que demanda la cuestión:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & nx \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Otro tipo de respuesta a esta pregunta es la siguiente:

Si $x = 0 \rightarrow M = I$ por lo que el producto es conmutativo: $N{\cdot}I = I{\cdot}N = N$

Si $x \neq 0 \rightarrow M{\cdot}N \neq N{\cdot}M$ si N no es la matriz identidad.

En este caso escribe lo que sabe de la no conmutatividad del producto de matrices, pero no contesta a la pregunta.

Otro estudiante intenta resolver un caso particular pero no concluye el ejercicio:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_1 {\cdot} M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$AB \neq BA$

<u>Examen 12. Pregunta 1</u>

Dada una matriz A, ¿existe una matriz B tal que el producto AB o BA sea una matriz de una sola fila? Aplicar la conclusión obtenida a la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Un estudiante escribe lo siguiente:

$A \;\times\; B \;=\; C$

$m{\times}n \;\; n{\times}p \;\; 1{\times}p$

$B \;\times\; A \;=\; C$

$n{\times}p \;\; m{\times}n \;\; 1{\times}n \quad 1{\times}1$

$p = m$

$m = 1,\ p = 1,\ n = 1$

Intenta estudiar las dimensiones de la matriz producto, pero tiene todavía una frágil comprensión del proceso.

En la siguiente tabla observamos la frecuencia y el porcentaje de respuestas a los ítems del grupo 2:

Tabla 6.4.1.2: Frecuencia y porcentaje de respuestas del grupo 2.

	Frecuencia	Porcentaje
Correctas	82	41,6%
Parcialmente correctas	28	14,2%
Incorrectas	43	21,8%
En blanco	44	22,4%
	197	100,0%

Vemos un porcentaje muy similar en cada tipo de preguntas. Sumando los porcentajes correspondientes a respuestas correctas o parcialmente correctas nos encontramos con 55,8% frente a un 44,2% que responde incorrectamente o deja la respuesta en blanco. Vemos, por tanto, que este tipo de preguntas resultaron difíciles para los estudiantes, sobre todo comparando con los resultados del grupo 1.

Entre las respuestas parcialmente correctas incluimos aquellas comprobaciones realizadas con casos particulares, las demostraciones erróneas debidas a errores de cálculo, las que presentan confusiones en la notación de matrices y determinantes y todos aquellos errores debidos a prisas o a la presión del examen, como, por ejemplo, aquellos provocados por copiar mal los datos del ejercicio.

Las respuestas incorrectas se considerarán aquellas que aplican las propiedades de las operaciones incorrectamente, las que consisten en repetir el enunciado sin aportar nada nuevo y todas las que presentan confusiones en los conceptos básicos y en las que sólo se contesta *sí* o *no*, sin ningún tipo de justificación.

Grupo 3: Ejercicios de aplicación del cálculo matricial.

Se consideran respuestas parcialmente correctas cuando el alumno plantea correctamente el problema pero su justificación no es clara o es incompleta.

<u>Examen 5. Pregunta 4 / Examen 6. Pregunta 2 / Examen 7. Pregunta 2</u>

Una fábrica produce tornillos de longitudes 1, 3, 7cm y tienen 4 clientes: Andrés, Juan, Lucas y Pedro. Durante el mes de enero vendió a Andrés 9 cajas de tornillos de 1cm, 5

cajas de 3cm y 2 cajas de 7cm; a Juan 3 cajas de 1cm y 8 cajas de 3cm, a Lucas no se le vendió nada y a Pedro, 6 cajas de 1cm, 7 cajas de 3cm y 1 caja de 7cm.
Durante el mes de febrero las ventas fueron: a Andrés 5, 2 y 3 cajas de tornillos de 1, 3 y 7cm respectivamente; a Juan 6 cajas de cada tipo; a Lucas sólo 4 cajas de 1cm y Pedro este mes no compró ninguna.
a) Construye las matrices que expresan las ventas en los meses de enero y febrero.
b) Ayudándote de las matrices anteriores calcula la matriz de ventas conjuntas de enero y febrero.
c) Escribe la matriz que refleje la variación de las ventas de febrero en relación con las de enero.

Un tipo de respuesta es:

Enero

	A	*J*	*L*	*P*
1	*9*	*3*	*0*	*6*
3	*5*	*8*	*0*	*7*
7	*2*	*0*	*0*	*1*

Febrero

	A	*J*	*L*	*P*
1	*5*	*6*	*4*	*0*
3	*2*	*6*	*0*	*0*
7	*3*	*6*	*0*	*0*

$$c)\begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 & 6 \\ 5 & 8 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 & 6 \\ 3 & 2 & 0 & 7 \\ -1 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El error está en confundir el sentido de la resta.

En la siguiente respuesta un estudiante sabe traducir la información a notación matricial, pero el error lo comete al añadir a las matrices una primera columna con los nombres de los compradores.

Enero *Febrero*

A = (9 5 2) *A' = (5 2 3)*

J = (3 8 0) *J' = (6 6 6)*

L = (0 0 0) *L' = (4 0 0)*

P = (6 7 1) *P' = (0 0 0)*

$V_e = (18\ 20\ 3)$, $V_f = (15\ 8\ 9)$

$$Enero=\begin{pmatrix} A & 9 & 5 & 2\\ J & 3 & 8 & 0\\ L & 0 & 0 & 0\\ P & 6 & 7 & 1\end{pmatrix}, Febrero=\begin{pmatrix} A & 5 & 2 & 3\\ J & 6 & 6 & 6\\ L & 4 & 0 & 0\\ P & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\text{Ventas conjuntas}=\begin{pmatrix} \text{2A} & 14 & 7 & 5\\ \text{2J} & 9 & 14 & 6\\ \text{2L} & 4 & 0 & 0\\ \text{2P} & 6 & 7 & 1\end{pmatrix}$$

$$\text{Variación ventas}=\begin{pmatrix} 0 & -4 & -3 & 1\\ 0 & 3 & -2 & 6\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & -6 & -7 & -1\end{pmatrix}$$

Este error se podría considerar únicamente notacional, pero provoca errores con las matrices suma y resta.

Como ejemplos de respuestas incorrectas:

$$Enero=\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2\\ 3 & 8 & 0\\ 6 & 7 & 1\end{pmatrix}, Febrero=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 7\\ 6 & 6 & 6\end{pmatrix}$$

$$c)\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2\\ 3 & 8 & 0\\ 6 & 7 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 7\\ 6 & 6 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1\\ 2 & 5 & -7\\ 0 & 1 & -5\end{pmatrix}$$

Las filas nulas se eliminan. Esto origina que se resten filas pertenecientes a compradores diferentes.

En la siguiente respuesta vemos un ejemplo en el que un alumno no sabe traducir la información a notación matricial:

a) Enero:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}\begin{array}{c} \begin{matrix} A & J & P\end{matrix}\\ \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6\\ 5 & 8 & 7\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}=\begin{array}{c} \begin{matrix} A & J & P\end{matrix}\\ \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6\\ 15 & 24 & 21\\ 14 & 0 & 7\end{pmatrix}\end{array}$$

Febrero:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}\begin{array}{c} \begin{matrix} A & J & P\end{matrix}\\ \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4\\ 2 & 6 & 0\\ 3 & 6 & 0\end{pmatrix}\end{array}=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 4\\ 6 & 18 & 0\\ 21 & 42 & 0\end{pmatrix}$$

Veamos la siguiente respuesta:

$$E{\cdot}F=\begin{pmatrix}9&5&2\\3&8&0\\0&0&0\\6&7&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&2&3\\6&6&6\\4&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&5&2\\3&8&0\\6&7&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&2&3\\6&6&6\\4&0&0\end{pmatrix}$$

En este caso, el alumno intenta multiplicar las matrices de enero y febrero, pero no puede hacerlo por las dimensiones de las matrices, así que elimina en cada una de ellas la fila de ceros, consiguiendo así dos matrices de orden 3 que ya puede multiplicar.

Otro error viene de confundir las características de los tornillos, 1, 3, 7cm, con datos numéricos, como en el siguiente ejemplo:

$$(1\ 3\ 7)\begin{pmatrix}9&3&0&6\\5&8&0&7\\2&0&0&1\end{pmatrix}$$

(38 27 0 34) → ventas de enero

En la siguiente tabla observamos la frecuencia y el porcentaje de respuestas a los ítems del grupo 3:

Tabla 6.4.1.3: Frecuencia y porcentaje de respuestas del grupo 3.

	Frecuencia	Porcentaje
Correctas	41	66,1%
Parcialmente correctas	5	8,1%
Incorrectas	8	12,9%
En blanco	8	12,9%
	62	100,0%

En este caso los porcentajes encontrados son muy diferentes. Podemos observar que un 66,1% respondieron correctamente y un 8,1% parcialmente correcto, es decir, acertaron el planteamiento del problema pero alguno de sus apartados no es correcto, sin ser un fallo de concepto; por ejemplo, equivocarse en el sentido de la resta. No parece que la representación y el cálculo matricial resulten especialmente difícil a los alumnos, pese a haberlo trabajado poco en clase.

Las respuestas incorrectas encontradas presentan en general un planteamiento correcto en cuanto a la traducción a notación matricial pero son incorrectas las operaciones hechas con ellas; por ejemplo, el alumno plantea una multiplicación donde la situación requiere una suma. También se observa que algunos estudiantes eliminan una fila de una matriz cuando todos sus elementos son 0 (como si la fila nula fuese superflua).

Grupo 4: Ejercicios de cálculo matricial.

Las respuestas parcialmente correctas ocurren cuando el estudiante realiza operaciones correctas pero no completa el procedimiento o comete algún error "leve" como omitir un signo, como se verá en los ejemplos siguientes:

Examen 1. Pregunta 6

Resolver: $\begin{cases} x - y + 3z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + 2z = 5 \end{cases}$

El alumno utiliza el método de Gauss y lo aplica correctamente, llegando a:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 3 \Rightarrow x - y = 3 - 3\lambda \Rightarrow x - y - 3 + 3\lambda = 0 \\ 3y - 4z = -1 \Rightarrow 3y = -1 + 4\lambda \Rightarrow 3y + 1 - 4\lambda = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Vemos que no sabe cómo acabar el ejercicio y presentar la solución correcta, pese a que sabe que es un sistema compatible indeterminado.

A la hora de resolver sistemas de este tipo se encuentran muchos errores que provienen de copiar mal el sistema o la matriz del sistema, de un paso a otro del método de Gauss. Otro error frecuente es confundir sistema indeterminado con incompatible, o equivocarse al pasar una matriz escalonada por Gauss a un sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ y + 2z = 1. \\ -6z = -5 \end{cases}$$

Otro error común aparece a la hora de aplicar la regla de Cramer, ya que vemos alumnos con problemas para calcular determinantes o aplicar las propiedades:

$$\frac{\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 11 & 3 & 5 \\ 29 & -5 & 6 \end{pmatrix}}{17} = \begin{vmatrix} \frac{2}{17} & \frac{1}{17} & \frac{-1}{17} \\ \frac{11}{17} & \frac{3}{17} & \frac{5}{17} \\ \frac{29}{17} & \frac{-5}{17} & \frac{6}{17} \end{vmatrix}$$

Las respuestas incorrectas se presentan cuando se comete alguno de los errores siguientes:

<u>Examen 6. Pregunta 8</u>

Discute el sistema: $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - 4z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \end{cases}$

El principal error que aparece en la discusión de sistemas es que los estudiantes sólo estudian el rango de la matriz del sistema, sin preocuparse por lo que pasa con la ampliada. En este caso concreto, por ser sistema homogéneo, el rango de la matriz del sistema coincide con el rango de la ampliada, pero tampoco se indica esto.

En este ejemplo el alumno llega a la conclusión de que rg M = 2 y por tanto dice que el sistema no tiene solución y que es incompatible. Esto va a ser frecuente en lo exámenes: sólo se estudia el rango de la matriz del sistema; si sale tres es compatible determinado; si sale dos es incompatible.

Tenemos también la siguiente solución al ejercicio:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 0 \\ 1 & 1 & -4 & : & 0 \\ 3 & -1 & -2 & : & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow rgM = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = rgM' = 2 \Rightarrow \textit{ sistema incompatible}$$

En este tipo de respuestas se confirma que no se ha comprendido que el rango de la matriz ampliada ha de ser mayor o igual que el rango de la matriz del sistema.

Muchas veces un error operacional conduce a un resultado incoherente y el alumno no lo detecta.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$|M| = 8$

1º) M = 8

rgM = 2 = rgM' $\Rightarrow$ *sistema compatible indeterminado*

2º) M $\neq$ *8*

rgM = 3

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow rgM' = 2 \Rightarrow \textit{ sis. comp. indef.}$$

El primer error es simple: se equivoca en una operación y el determinante da 8 en vez de dar 0. A partir de aquí el alumno intenta discutir el sistema como si dependiera de un parámetro. En el caso 1º, no razona por qué el rango de M' es 2 y en el caso 2º, confunde la notación de matriz y determinante y afirma incorrectamente que el rango de M' es menor que el rango de M. Además, no se entiende muy bien lo de "sis. comp. indef." (indefinido?) que no es ninguno de los tipos de sistemas estudiados.

Examen 6. Pregunta 5

Calcula la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

La contestación del alumno es la siguiente:

$$A^T = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AdjA^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 \Rightarrow \frac{|AdjA^T|}{|A|} = 1$$

El alumno confunde la fórmula de cálculo de la matriz inversa y su respuesta es un número, no una matriz.

Examen 7. Pregunta 6

Halla la matriz adjunta de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

El alumno "simplifica" todos los ceros:

$$AdjA = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}$$

En la siguiente tabla observamos la frecuencia y el porcentaje de respuestas a los ítems del grupo 4:

Tabla 6.4.1.4: Frecuencia y porcentaje de respuestas del grupo 4.

	Frecuencia	**Porcentaje**
Correctas	322	57,3%
Parcialmente correctas	122	21,7%
Incorrectas	86	15,3%
En blanco	32	5,7%
	562	100,0%

Nuevamente el porcentaje de respuestas correctas difiere bastante del resto de porcentajes. Vemos que un 57,3% de los alumnos respondieron correctamente y un 21,7% parcialmente correcto, es decir, realizaron las operaciones correctas pero no completaron el procedimiento o cometieron pequeños errores. Parece que este tipo de problemas no tienen una especial dificultad, ya que sólo un 21% respondieron incorrectamente o dejaron la pregunta en blanco.

Grupo 5: Propiedades de los determinantes.

Las respuestas parcialmente correctas son aquellas en las que realizan cálculos parciales correctos pero no concluyen o cometen algún error menor de operaciones, como en los siguientes ejemplos:

<u>Examen 1. Pregunta 2.</u>

$$Calcula \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Un estudiante realiza los cálculos correctamente y llega a:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{-13}{2} & 4 & -4 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & -2 & 9 \end{vmatrix}$$

El error viene al calcular el determinante desarrollando por la primera columna, ya que el alumno no multiplica por 2 el menor correspondiente:

$$\begin{vmatrix} \frac{-13}{2} & 4 & -4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 7 & -2 & 9 \end{vmatrix} = -143$$

en vez de -286, que es el resultado correcto.

<u>Examen 5 /Pregunta 5</u>

Calcula $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

En este problema, similar al anterior, otro alumno comete el siguiente error:

$$2\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 & -3 \\ -7 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 2 & -6 \\ -14 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

confundiendo la multiplicación de un número por una matriz con un producto de un número por un determinante.

En el mismo problema encontramos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \underset{F_4+2F_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

El alumno desarrolla por la tercera columna pero olvida cambiar el signo al menor.

<u>Examen 1. Pregunta 4 / Examen 5. Pregunta 7</u>

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. *Sin calcular* A^{-1} *ni* A^T, *decide cuánto valen* $\left|A^{-1}\right|$ *y* $\left|\left(A^T\right)^{-1}\right|$.

Un estudiante da una respuesta correcta (salvo por un error en el cálculo del determinante provocado por copiar el determinante del ejercicio que precedía a este en el examen), pero no la justifica en ningún momento.

$$Si\ |A| = a, \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{a}$$

$$|A| = -2 + 2 + 0 + 2 - 0 - 0 = 2 \Rightarrow \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\left|\left(A^T\right)^{-1}\right| = \frac{1}{\left|A^T\right|} \Rightarrow \left|A^T\right| = \frac{2}{1} = 2$$

$$\left|\left(A^T\right)^{-1}\right| = \frac{1}{2}$$

<u>Examen 5. Pregunta 8.</u>

Si A es 5×5 y detA = -1, cuánto vale det(2A)?

El método que sigue un alumno para resolver el ejercicio es utilizar casos particulares de matrices de orden menor, para así poder inferir qué pasa con la matriz 5×5, sólo que se equivoca al final y presenta el resultado para una matriz 4×4.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, 2B = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 + 6 + 0 - 0 - 1 - 8 = -3$$

$$2C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 0 + 48 + 0 - 0 - 8 - 64 = -24$$

$$|2A| = -16$$

Realmente la respuesta dada es únicamente $|2A| = -16$. Todo lo anterior son cálculos que realiza por su cuenta para inferir el resultado. De hecho, en la hoja entregada aparecen tachados más cálculos. Esa es la razón por la que el alumno no cuida su notación. No está preocupado en escribir correctamente para presentar la respuesta, sino sólo en encontrarla.

Las respuestas se consideran incorrectas cuando se comete algún error que evidencia una aplicación incorrecta de los objetos intervinientes o una falta de significado. Se incluirán también aquellos ejercicios en los que el alumno sólo da un paso, aunque sea correcto y luego no sabe seguir.

Examen 5. Pregunta 5

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3-2F_2 \\ F_2-F_2 \\ F_1-F_2}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Al alumno se le ha mostrado una técnica para resolver un determinante de orden superior a tres: es muy conveniente “hacer ceros” en una de las columnas. Escoge la primera columna, pero hace ceros todos los elementos, debiendo, para ello, restar una fila de sí misma. De esta forma, el determinante daría cero, por aplicación incorrecta de una propiedad.

En la siguiente respuesta un estudiante llega también a una columna de ceros, pero, aún así, desarrolla el determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

También es frecuente confundir la fila sobre la que se realizan las operaciones, es decir, el alumno indica que hay que restar las filas pero al hacer la operación no sabe quien resta a quien:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_1-F_2 \\ 2F_1-F_3}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Examen 1. Pregunta 4 / Examen 5. Pregunta 7

$$A \cdot A^T = I$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El alumno confunde la matriz inversa con la traspuesta, e intenta calcularla a partir de la definición, en vez de utilizar el algoritmo estudiado en clase. De todas formas, en ningún momento intenta calcular los determinantes pedidos.

Otro tipo de respuesta incorrecta es:

$|A| = 3$

$|A^{-1}| = |A| \cdot |A|^{-1} = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$

$\left|(A^T)^{-1}\right| = |A^{-1}| = 1$

En la siguiente tabla observamos la frecuencia y el porcentaje de respuestas a los ítems del grupo 5:

Tabla 6.4.1.5: Frecuencia y porcentaje de respuestas del grupo 5.

	Frecuencia	**Porcentaje**
Correctas	117	42,2%
Parcialmente correctas	56	20,2%
Incorrectas	50	18,1%
En blanco	54	19,5%
	277	100,0%

El 37,6% de los estudiantes respondieron incorrectamente o dejaron la pregunta en blanco, lo que indica que este tipo de problemas resulta difícil.

Grupo 6: Modelización algebraica, mediante sistemas lineales.

Hemos clasificado como respuestas parcialmente correctas a aquellas en las que el estudiante realiza correctamente la traducción al lenguaje algebraico pero comete errores en la resolución del problema o cuando esa modelización contiene algún error de interpretación leve, como veremos en los siguientes ejemplos.

<u>Examen 13. Pregunta 6.</u>

Calcular tres números que cumplan las condiciones siguientes:

a) El primero es la suma de los otros dos.

b) El segundo es igual a la mitad del primero más el doble del tercero.

c) La suma de todos es 6.

La resolución del alumno es la siguiente:

$$\begin{cases} x = y + z \\ y = \dfrac{1}{2}x + 2z \\ x + y + z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x + 2y - 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

Vemos que la equivocación radica en no multiplicar la incógnita *z* de la 2º ecuación por 2. Esto se ha encontrado en muchas de las respuestas analizadas. El alumno llega a las siguientes soluciones: x = 32, y = 24, resultado de hacer

8z = 0 $\Rightarrow$ z = 8

El alumno, al no verificar las soluciones, no se da cuenta de la no pertinencia de su solución.

En el siguiente ejemplo de respuesta, también hay una equivocación con el término *z*, pero además se equivoca con el orden de las incógnitas al escribir la matriz ampliada.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \\ 2y - x - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Examen 3. Pregunta 5.</u>

Los hijos de Juan fueron el lunes a comprar un bocadillo de jamón, un pastelito y un refresco, pagando por todo 2,7 euros. El martes compraron dos bocadillos, dos pastelitos y tres refrescos, pagando por todo 5,85 euros. El miércoles, Juan encarga a sus hijos 4 bocadillos de jamón, 4 pastelitos y 5 refrescos, y, tras interrogar a sus hijos sobre los precios ellos aseguran desconocerlos, pero si recuerdan lo pagado e cuales eran los encargos del lunes y del martes. Sabiendo que el tendero no varió los precios, Juan calculó la cantidad que debe dar a sus hijos por e encargo del miércoles. ¿Podrías decir cuál es esa cantidad?¿Se puede deducir el precio de cada cosa?

El alumno llega a un precio negativo, por un error de operaciones, pero él mismo indica el error:

-z = m-11’7 $\Rightarrow$ *z = -0’45* $\Rightarrow$ *Esto no puede ser negativo*

<u>Examen 6. Pregunta 6.</u>

Hallar un número de tres cifras, sabiendo que suman 9, que si del número dado se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198, y que, además, la cifra de las decenas es media aritmética de las otras dos.

El alumno plantea bien el problema y reduce la matriz correctamente por el método de Gauss, llegando a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -3 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

El error viene al confundir las incógnitas:

-3z = -9 $\Rightarrow$ *z = 3*

Deduce entonces que $y = 1$ y $x = 5$, no comprobando las soluciones.

Se consideran respuestas incorrectas cuando se cometen errores conceptuales y/o situaciones originando conflictos semióticos por la dualidad "expresión/contenido" (Godino, 2002b), por lo que, algunos estudiantes, no pueden construir el modelo algebraico.

<u>Examen 12. Pregunta 7 / Examen 13. Pregunta 7.</u>

Dos hermanos charlando concluyen que entre ambos tienen 29 años, y el uno le dice al otro: "dentro de 8 años mi edad será el doble de la tuya". ¿Cuántos años tiene cada uno en la actualidad?

Encontramos los siguientes planteamientos del problema, todos incorrectos:

$$\begin{cases} x+y=29 \\ x+8=2y \end{cases}, \begin{cases} x+y=29 \\ 8x=2y \end{cases}, \begin{cases} A+B=29 \\ A=2B+8 \end{cases}, \begin{cases} x+y=29 \\ x+2y=45 \end{cases}$$

Realmente este problema se proponía para valorar si saben resolver un sistema utilizando el método de Gauss. El planteamiento corresponde a una actividad de 3º o 4º de ESO. Sin embargo nos hemos llevado una sorpresa parcial, al encontrarnos con estas dificultades para construir el modelo algebraico por parte de nuestros estudiantes.

<u>Examen 3. Pregunta 5.</u>

El alumno plantea las dos primeras ecuaciones, pero no la tercera, que es la que depende de un parámetro, por lo que no puede resolver el problema:

x+y+z = 2'7

2x+2y+3z = 5'85

En la siguiente tabla observamos la frecuencia y el porcentaje de respuestas a los ítems del grupo 6:

Tabla 6.4.1.6: Frecuencia y porcentaje de respuestas del grupo 6.

	Frecuencia	Porcentaje
Correctas	44	38,9%
Parcialmente correctas	18	15,9%
Incorrectas	28	24,8%
En blanco	23	20,4%
	113	100,0%

De esta tabla se desprende que en el grupo de ítems 6 sólo un 38,9% de los estudiantes respondieron correctamente y el 15,9% lo hicieron parcialmente, es decir, plantean el problema correctamente pero se equivocan en su resolución o queda incompleta. Esto indica la dificultad para resolver este tipo de problemas, en donde las carencias de significado recaen especialmente en la modelización algebraica: el 45,2% de los estudiantes respondieron incorrectamente o dejaron la pregunta en blanco.

Es sorprendente observar como la mayoría de los alumnos presentaron más dificultades en el planteamiento y resolución por el método de Gauss con sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas que con sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas. Esto puede deberse a que, en el aula, se le da más importancia e éstos últimos por ser más novedosos, dando por sentado que el alumno será capaz de extrapolar sus conocimientos a casos más sencillos.

Grupo 7: Preguntas teóricas.

Se catalogan como respuestas parcialmente correctas aquellas en las que el estudiante conoce la noción del concepto correspondiente, pero su justificación es incompleta o inadecuada, como en los casos que incluimos a continuación.

<u>Examen 1. Pregunta 11 / Examen 14. Pregunta 5.</u>

Producto de matrices. Condiciones para su realización. ¿Es posible que para dos matrices A y B no cuadradas, existan AB y BA?

La respuesta de un alumno es la siguiente:

Para poder realizar o producto de matrices, o número de columnas da primeira matriz ten que ser igual ó número de filas da segunda, sendo fieis a :
$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$ *, def. teórica*
É posible, só se ten que cumplir a definición teórica do producto de matrices. Por exemplo: $A_{2\times 3}$ *,* $B_{3\times 2}$*, podería multiplicar tanto AB como BA.*

Como vemos el alumno no contesta a la primera parte de la pregunta, cosa que podremos observar en la mayoría de los exámenes realizados. En general se observa que el estudiante contesta a los contenidos teóricos cuando se le pregunta alguna cuestión cuya respuesta sea muy concreta y corta, pero en cambio aquellas preguntas que obligan al alumno a desarrollar una argumentación (por ejemplo, producto de matrices) se dejan sin contestar.

La siguiente contestación es correcta, exceptuando el hecho de que se utiliza la misma letra para denotar los elementos de las dos matrices:

$$(a_{i1}\ a_{i2}\ldots a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots. \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + \ldots + a_{in}a_{nj}$$

<u>Examen 1. Pregunta 10 / Examen 11. Pregunta 3 / Examen 14. Pregunta 4.</u>

¿Qué condición deben cumplir dos matrices cualesquiera A y B para que pueda efectuarse su suma? ¿Es ésta conmutativa?

Encontramos, entre otras, las siguientes respuestas:

1º) *Deben tener el mismo número de filas y de columnas. Las matrices no cumplen esta propiedad.*

2º) *Para poder sumar las dos matrices deberán ser iguales en cuanto a su extensión.*

En el primer caso el alumno escribe correctamente la condición que deben cumplir las matrices para que se pueda efectuar la suma, pero asegura que no se cumple la propiedad conmutativa, seguramente confundido con la multiplicación de matrices. En el segundo caso, el estudiante no expresa correctamente sus ideas.

Como respuestas incorrectas tenemos las siguientes:

<u>Examen 1. Pregunta 11 / Examen 14. Pregunta 5.</u>

a) Dos matrices pueden multiplicarse si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda.

b) No, no es posible.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\4&2&5&7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1\\4&2\\5&7\end{pmatrix}$$

$\cancel{AB},\cancel{BA}$ *xq el número de columnas de A y B no coinciden con el número de filas de ambas.*

El alumno no contesta a la primera parte de la pregunta: producto de matrices. En cuanto a la pregunta de si existe A y B se pone de ejemplo dos matrices para las que no existe ninguno de los productos. No se razona la pregunta para el caso de dos matrices cualesquiera.

Similar es la siguiente respuesta, donde tampoco se contesta la primera parte de la pregunta:

Para poder multiplicar dúas matrices, a segunda matriz ten que ter o mesmo número de filas que a primeira de columnas.

$$\begin{pmatrix}-&-&-\\-&-&-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-&-\\-&-\\-&-\end{pmatrix}$$

3×2 2×3

Non, se non son cadradas, non se pode efectuar as operacións AB e BA.

Aquí el alumno no se da cuenta de que pone un ejemplo en el que sí se pueden hacer AB y BA. Además escribe mal la dimensión de las matrices, confundiendo filas y columnas.

En el ejemplo siguiente, el alumno confunde el hecho de poder multiplicar AB y BA con el hecho de que se cumpla la propiedad conmutativa:

nº columnas 1º = nº filas 2º

A·B = C

2×3 3×4 = 2×4

B·A = C

3×4 2×3 no es posible

No son conmutativas

En la siguiente respuesta, un alumno confunde las filas con las columnas:

A primeira ten que ter o mesmo número de filas que as columnas da segunda.

Examen 1. Pregunta 10 / Examen 11. Pregunta 3 / Examen 14. Pregunta 4.

Ser una matriz $n \times n$

En este caso el alumno contesta que sólo se pueden sumar las matrices cuadradas.

En la siguiente tabla observamos la frecuencia y el porcentaje de respuestas a los ítems del grupo 7:

Tabla 6.4.1.7: Frecuencia y porcentaje de respuestas del grupo 7.

	Frecuencia	**Porcentaje**
Correctas	29	51,8%
Parcialmente correctas	7	12,5%
Incorrectas	18	32,1%
En blanco	2	3,6%
	56	100,0%

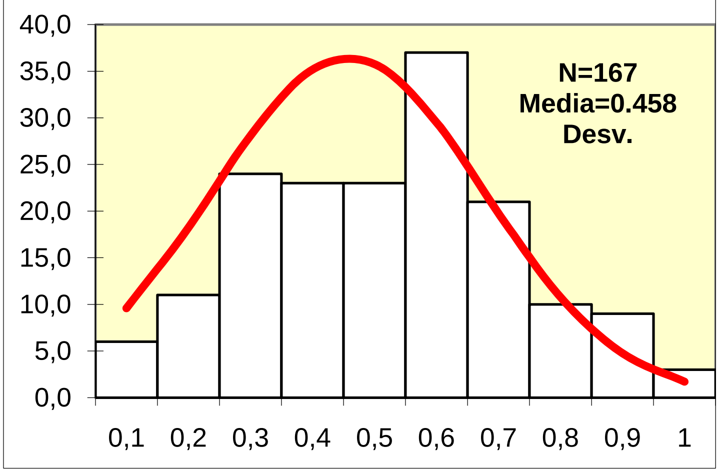
De esta tabla se desprende que en el grupo de ítems 7 un 51,8% de los estudiantes respondieron correctamente y el 12,5% lo hicieron parcialmente, es decir, demuestran que entienden lo que se les pregunta pero no lo expresan correctamente o dejan la contestación incompleta. Esto indican la dificultad que encontraron los alumnos para contestar estas preguntas teóricas. El 35,7% de los estudiantes respondieron incorrectamente o dejaron la pregunta en blanco.

6.4.2- Análisis de ítems y dificultad de la prueba.

Una vez analizados los resultados de cada ítem vamos a estudiar las características globales de la prueba: puntuación total, dificultad e índice de dificultad de cada ítem. La finalidad es analizar si la prueba podría ser útil como instrumento para evaluar el conocimiento de los alumnos sobre matrices, determinantes y sistemas en futuras muestras. Hemos realizado este cálculo de dos formas diferentes: en primer lugar considerando, conjuntamente, las respuestas correctas y en segundo lugar considerando las correctas y las parcialmente correctas.

Para ello hemos calculado primeramente el porcentaje de respuestas correctas de cada estudiante en cada uno de los exámenes. Se ha preferido usar porcentajes y no frecuencias ya que los exámenes no constan todos del mismo número de preguntas. La distribución de estos porcentajes se muestra en la figura 6.4.2.1.

FIGURA 6.4.2.1: Distribución de porcentajes de respuestas correctas.



La dificultad de la prueba se puede observar si consideramos que hubo alumnos (5) que no respondieron correctamente ninguna de las preguntas y que sólo 3 respondieron correctamente a la totalidad del examen. La media del porcentaje de respuestas correctas fue 0,458 (45,8%) y la desviación típica 0,219. La distribución es aproximadamente normal como se observa en el gráfico.

En la tabla 6.4.2.2 mostramos el índice de dificultad de cada grupo de ítems, en el primer caso considerado. El índice de dificultad es simplemente el porcentaje de respuestas correctas.

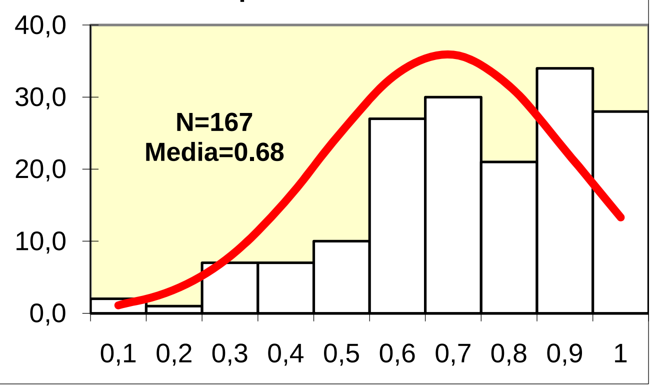
Tabla 6.4.2.2: Índice de dificultad de los ítems.

Grupo 1	44,1%
Grupo 2	41,6%
Grupo 3	66,1%
Grupo 4	57,3%
Grupo 5	42,2%
Grupo 6	38,9%
Grupo 7	51,8%

En nuestro caso la dificultad de los ítems no es muy variable. Quizás han resultado más fáciles los ítems del grupo 3 (ejercicios de aplicación del cálculo matricial) y más difíciles los del grupo 6 (modelización algebraica). Curiosamente son los dos grupos que presentan un componente más práctico. La diferencia entre ambos grupos de ítems radica en que en el primero la aplicación sólo requiere el uso de matrices y sus operaciones, mientras que en el segundo la aplicación requiere la formulación de un sistema de ecuaciones y su resolución mediante cálculo matricial. La media de los índices de dificultad es 48,9%, lo cual indica que la prueba es difícil para los estudiantes.

En segundo lugar hemos estudiado la distribución del número de respuestas correctas y parcialmente correctas que se presenta en la figura 6.4.2.3.

FIGURA 6.4.2.3: Distribución del porcentaje de respuestas correctas y parcialmente correctas



En este caso 24 estudiantes resuelven la prueba. La media de contestaciones correctas o parcialmente correctas fue 68,7% (0,687) con una desviación típica del 22,2% (0,222). Consideramos que este dato indica dificultad dada la característica de la prueba. Recordemos que se trata de exámenes, y este dato indica que, en promedio el 31,3% de las preguntas son incorrectas o están en blanco, por lo que no puntuarían. Además, las preguntas parcialmente correctas no puntúan en su totalidad, por lo que con esto se pueden intuir cuáles han sido los resultados de los exámenes. Quizás deberían completarse estos datos con las notas de los exámenes, pero, como se verá en los apéndices, en algunos exámenes se valoraban más conocimientos de los que estudiamos en esta investigación, por lo que estas calificaciones no nos darían una información adecuada.

En la tabla 6.4.2.4 repetimos el cálculo de dificultad, teniendo en cuenta ahora las respuestas parcialmente correctas.

Tabla 6.4.2.4: Índice de dificultad de los ítems.

Grupo 1	73,9%
Grupo 2	55,8%
Grupo 3	74,2%
Grupo 4	79%
Grupo 5	62,4%
Grupo 6	54,8%
Grupo 7	64,3%

Las respuestas a los grupos de ítems mejoran notablemente. En este caso el que resulta más difícil es el 6, y el más fácil el 4. El grupo 6 es también el que resultaba más complicado cuando sólo considerábamos respuestas correctas. El grupo 4 corresponde a los ejercicios de cálculo matricial. Esta diferencia se puede justificar por las dificultades que tienen los alumnos en hacer cálculos sin equivocarse. De ahí que, contando las respuestas parcialmente correctas, este resulte el grupo más sencillo.

El enfoque de esta investigación es predominantemente cualitativo, por lo que no se definen índices cuantitativos para la dificultad, sino que se sustituyen por la descripción objetiva y minuciosa de todos los componentes que pueden afectar a la interpretación de los resultados de la investigación.

6.4.3- Conclusiones del análisis de datos.

En las secciones de este capítulo hemos analizado los resultados de los exámenes realizados por 167 alumnos sobre los contenidos de Álgebra Lineal en 2º de Bachillerato. A partir del estudio de datos hemos obtenido las siguientes conclusiones:

- La prueba en general ha sido difícil para los alumnos. En algún grupo de ítems (6) no llega al 40% el porcentaje de respuestas correctas. El porcentaje medio de respuestas correctas fue el 45,8%, analizando un total de 167 exámenes. Sólo tres alumnos respondieron correctamente a la totalidad del examen.
- Las mayores dificultades se encontraron en aquellos problemas que necesitan una modelización algebraica (grupo 6). Los más sencillos (tras incluir en el estudio las respuestas parcialmente correctas) han resultado ser los ejercicios de cálculo matricial. Quizás esto se deba a que son los ejercicios que más se trabajan en el aula. Dorier y Sierpinska (2001) señalan que el currículo del Álgebra Lineal ha pasado de darle importancia a los conceptos teóricos a priorizar los cálculos numéricos.
- En algunos grupos (2,5,6) se han encontrado porcentajes muy altos de respuestas en blanco lo que indica la dificultad que tienen los alumnos para abordar estos problemas debidos a conflictos semióticos situacionales y/o conceptuales. Estos grupos corresponden a los ejercicios que utilizan la notación matricial, las propiedades de los determinantes y los problemas de modelización algebraica. Por el contrario, las preguntas de Selectividad, los ejercicios de cálculo y las preguntas teóricas sólo presentan un 8,1%, 5,7% y 3,6%, respectivamente, de respuestas en blanco. Dickinson y Eade (2004) realizaron un estudio con estudiantes de 11 años y conluyeron que la mayoría de los estudiantes que resuelven ecuaciones utilizan reglas aprendidas y manipulan a ciegas sin entender su significado real. Consideramos que esta afirmación se puede generalizar, vistos los resultados de esta investigación, a estudiantes de Bachillerato al abordar el Álgebra Lineal.
- En general, se observan muchos problemas a la hora de utilizar una notación adecuada. Parece como si los alumnos sólo se preocuparan de conseguir un resultado final sin preocuparles cómo describir correctamente los procesos que ponen en juego y las justificaciones del mismo

- Encontramos que los alumnos no tienen apenas dificultades en abordar problemas “tipo”, es decir, muy similares a los que encontramos en los libros de texto, pero que fallan si el problema contiene algún detalle que lo haga diferente. Por ejemplo, si tienen que desarrollar un determinante por una columna, realizan bien el cálculo si en la columna de ceros el otro elemento es un 1, pero se equivocan si aparece un número distinto de 1. Otro ejemplo es la dificultad para plantear y resolver por el método de Gauss sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, mientras que resuelven perfectamente los de tres ecuaciones, que son los que aparecen mayoritariamente en los libros de texto de este nivel.

Hemos realizado un estudio detallado de los errores en cada una de las preguntas. Los principales errores detectados son los siguientes:

- Errores en operaciones simples (sumas, restas,…) que conducen a errores de bulto a lo largo del ejercicio. El alumno no se da cuenta de la incoherencia de algunos resultados. No verifica los mismos, mostrando una acusada falta de espíritu crítico. Esto hace que tengamos grandes diferencias entre la distribución de respuestas correctas y la que incluye las respuestas correctas y las parcialmente correctas.
- Aplicación incorrecta de resultados teóricos, sobre todo al aplicar el teorema de Rouché-Fröbenius y las propiedades de los determinantes.
- Dificultades en manejar situaciones diversas que dependan de un parámetro. Los alumnos no están acostumbrados a este tipo de situaciones. De hecho, Gascón (1998) considera que uno de los problemas de la enseñanza del Álgebra es la ausencia del uso de parámetros.
- Imprecisión en las definiciones de conceptos, que indican una comprensión insuficiente.
- Confusión entre la notación y concepto de matriz y determinante.
- Realización incorrecta de demostraciones, exceptuando aquellas vistas con anterioridad en clase y que sólo suponen una memorización.

Como conclusión creemos que el tema tiene una notable dificultad para los alumnos de 2º de Bachillerato, aunque no parece que aquellos ejercicios que consistan únicamente en la repetición de una rutina resulten complicados. El alumno tiene dificultad en elaborar los conceptos teóricos y el éxito que tiene en las respuestas a las preguntas teóricas de los exámenes se debe a la repetición de las demostraciones vistas en clase, faltándoles conocimientos teóricos suficientes para abordar otro tipo de justificaciones.

Recordemos que, aunque aparece en forma implícita, el alumno no ha estudiado el tema de espacios vectoriales, el cual podría haberle proporcionado herramientas para abordar diferentes situaciones.

6.5- Análisis de la Entrevista. Discusión de Resultados.

En esta parte del trabajo presentamos el análisis de las entrevistas realizadas a dos alumnas, en cuya selección hemos tenido en cuenta que fueran receptivas, comunicativas y colaboradoras al proceso de investigación que se estaba realizando. Además describimos los objetivos, el guión de entrevista, la trascripción de las mismas y el análisis de los resultados.

Las razones que llevaron a seleccionar a estas dos alumnas en concreto fue cuestión de oportunidad. La realización de la entrevista suponía un pequeño esfuerzo para ellas, en el sentido que debían ir al instituto y estar allí aproximadamente una hora y media. Como ya sabemos, el curso de 2º de Bachillerato supone, a veces y desgraciadamente, una carrera contra reloj: hay que terminar todos los programas y a los alumnos se les acumulan los exámenes, llegando, en el último mes, a tener dos o tres al día. En estas condiciones no pareció conveniente pedir a ningún alumno que colaborara en esta investigación hasta que el curso estuvo completamente acabado.

Llegados a este punto apareció un problema nuevo: la mayoría de los alumnos del instituto trabajan en verano y los estudiantes de 2º, en su mayoría, comenzaban a trabajar al día siguiente de tener las notas, sin esperar al examen de Selectividad. Esto dificultaba más la elección de alumnos, ya que se debía dar la circunstancia de que no estuvieran trabajando.

Las alumnas entrevistadas son alumnas brillantes: una de ellas recibió en el Bachillerato la calificación de Matrícula de Honor y la otra obtuvo una media de 8,7. Ambas llevaron un 9 en Matemáticas en 2º curso. Afortunadamente las características de estas alumnas voluntarias correspondían con el propósito de la investigación, ya que se trataba de ver si se cumplía la segunda hipótesis planteada por nosotros:

H2) *Los estudiantes de 2º de Bachillerato presentan dificultades en la comprensión de los conceptos básicos del Álgebra Lineal, pero no en la utilización de sus algoritmos de cálculo. (faceta cognitiva)*

Efectivamente, como observamos en el análisis de los exámenes, los ejercicios de cálculo fueron los que resultaron más sencillos para los alumnos, y, por otra parte, eran lo que aparecían en los exámenes con mayor frecuencia. Se quiere averiguar, con esta entrevista si unas alumnas que consiguieron buenas notas en los exámenes comprenden los conceptos con los que están trabajando.

6.5.1 Objetivo y guión de la Entrevista.

El propósito fundamental de esta entrevista era el de profundizar en los aspectos que no quedaron claros en las respuestas al cuestionario y completar la información de algunas cuestiones que no fueron consideradas en el mismo

A pesar de que se usó un guión de entrevista, en ocasiones la investigadora formuló otras preguntas o, mejor dicho, planteó las mismas de manera diferente, con el fin de aclarar dudas manifestadas en las respuestas de las estudiantes. Los objetivos específicos pretendidos con la realización de la entrevista consistieron en recabar información sobre la opinión de los estudiantes sobre la importancia del Álgebra Lineal en el programa de 2º de Bachillerato, el conocimiento de algunos conceptos matemáticos estudiados y la opinión que tienen los alumnos sobre la dificultad del tema.

A continuación presentamos el guión de entrevista utilizado, formulando las preguntas de acuerdo a los objetivos propuestos:

Primer objetivo: *Conocer la opinión de los estudiantes sobre la importancia del Álgebra Lineal en el currículo de 2º de Bachillerato.* Respecto a este objetivo se formularon las siguientes preguntas:

- ¿En qué nivel de vuestros estudios os habían enseñado Álgebra?
- ¿Cuánto tiempo aproximado le dedicasteis al estudio de los temas de matrices y determinantes antes de hacer el examen?
- ¿Creéis que el tiempo dedicado en clase para enseñar matrices y determinantes fue suficiente como para haber asimilado los conceptos, definiciones y propiedades?
- ¿Creéis que el tiempo dedicado en clase fue suficiente para responder a las preguntas de los exámenes?
- ¿Creéis que el Álgebra Lineal es útil en un Bachillerato? ¿Debe estar en el temario?
- ¿Creéis que es útil para vuestros estudios posteriores?

- ¿Habéis visto la aplicación de las matrices y determinantes en los contenidos impartidos durante el resto del curso?

Segundo objetivo: *Evaluar los conocimientos de algunos conceptos matemáticos sobre Álgebra Lineal, complementarios a los que fueron preguntados en los exámenes*. Hay que destacar, como dato importante, que la parte de Álgebra Lineal se imparte a principio de curso, en el primer trimestre. Esta entrevista fue efectuada a fin de curso, cuando las alumnas ya estaban evaluadas y ya habían hecho el examen de Selectividad. Se propusieron las siguientes cuestiones:

- ¿Os acordáis qué es una matriz?
- ¿Qué operaciones podéis realizar con matrices?
- ¿Qué tipos de números podéis realizar con matices?
- ¿Qué tipos de números son los elementos de una matriz? ¿Pueden ser números complejos?
- ¿Qué diferencia hay entre una matriz y un determinante?
- ¿Entendéis las propiedades de los determinantes, qué significan?
- ¿Qué tipos de matrices conocéis? ¿Para qué sirven?
- ¿Sabéis calcular ecuaciones con matrices? ¿Para qué sirven? ¿Se pueden resolver siempre?
- ¿Qué diferencia hay entre la comprobación y la demostración de una propiedad de los determinantes?
- ¿Recordáis alguna demostración hecha en el tema?

Tercer objetivo: *Recabar mayor información en cuanto a la forma de cómo los estudiantes dieron respuestas a algunas preguntas.* A continuación presentamos las preguntas formuladas, que tienen que ver con las respuestas dadas a las definiciones de conceptos con sus propias palabras. Además se dispone de tres exámenes de cada alumna por lo que se puede observar cómo han ido evolucionando:

- Algunas preguntas no fueron hechas en el primer examen o la respuesta fue incorrecta. Sin embargo eran correctas en el segundo. Se quería saber a qué obedecía este cambio.
- En otras preguntas se presenta sistemáticamente el mismo error. Se les pregunta por qué.

- Se les pregunta por cuestiones concretas respondidas incorrectamente por la casi totalidad de los alumnos, aunque ellas, en particular, las contestaran correctamente. Se quiere saber su opinión sobre dichas cuestiones.

6.5.2. Análisis de los resultados de las entrevistas.

Como ya habíamos mencionado antes, se seleccionaron dos estudiantes que fueran receptivas, comunicativas y colaboradoras al proceso de investigación en cuestión. Las designaremos por los nombres ficticios María y Sandra para preservar el anonimato.

A continuación describimos el análisis correspondiente de respuestas dadas a la entrevista realizada a ambas estudiantes de acuerdo a los objetivos pretendidos. La entrevista se realizó conjuntamente aunque alguna pregunta fue realizada de forma individual a cada una. También presentamos la trascripción de algunos aspectos relevantes en dicha entrevista (la trascripción completa es presentada en el Anexo 2), para lo cual utilizamos tamaño de letra más pequeña que la usada en el resto del texto. Es de hacer notar que a cada alumna la identificaremos por las iniciales de los nombres supuestos y a la entrevistadora por la letra E.

6.5.2.1. Importancia del Álgebra Lineal en el currículo de 2º de Bachillerato.

De acuerdo a las respuestas dadas por las estudiantes entrevistadas, obtenemos que las alumnas habían estudiado Álgebra desde sus cursos de primaria y después siguieron a lo largo de toda la Educación Obligatoria. Comentaron que comenzaron estudiando ecuaciones y polinomios para posteriormente pasar al estudio de sistemas de ecuaciones.

E: ¿En qué nivel de vuestros estudios os habían enseñado Álgebra?

M: Matrices y determinantes este año.

E: ¿Y no sabéis de nada más que sea considerado Álgebra? ¿Qué es el Álgebra para vosotras?

M, S: Ni idea.

E: Todo lo de ecuaciones, toda esa parte de polinomios, ¿nunca os dijeron que eso era Álgebra?

M , S: Ah, sí…Álgebra, Álgebra, no.

E: Pero disteis ecuaciones y polinomios.

M, S: Eso sí.

E: ¿En qué curso empezasteis?

S: Yo creo que ya en primaria.

E: ¿Primaria?

M: Sí, después ecuaciones y polinomios en primero.

E: ¿Os acordáis más o menos qué os enseñaron?

S: Ecuaciones, después de 2º grado, despejar la x y esas cosas y luego en 3º sistemas, un poco más complicados.

E: ¿Las ecuaciones más o menos en primaria?

M: Yo creo que sí.

E: ¿Y los sistemas?

M: También.

S: Al principio más sencillos, pero en 2º y en 3º ya empezamos así con más…

E: ¿Y cómo resolvíais los sistemas? ¿Qué os enseñaron para resolver sistemas?

M: Sustitución, reducción e igualación.

E: ¿Cuál utilizabais más?

S: Reducción.

M: Sustitución.

E: ¿Sustitución?

M: Cualquiera menos reducción.

E: ¿Reducción es el que no usabas nunca?

S: Yo sí.

E: ¿Qué sistemas dabais? ¿Cuántas ecuaciones? ¿Cuántas incógnitas? ¿Cómo eran?

M: Primero dos y después tres.

E: ¿Pero mismo número de ecuaciones que de incógnitas: dos por dos, tres por tres?

M, S: Sí.

E: ¿Nunca había tres ecuaciones con dos incógnitas o dos ecuaciones con tres incógnitas?

M, S: No.

En cuanto al tiempo que le dedicaron al estudio del tema antes del examen, dicen que lo hicieron a lo largo de todo el trimestre pero que los dos últimos días hicieron un repaso general. Consideran que lo estudiado en clase era suficiente para poder abordar la prueba con garantías.

E: Vamos a algo un poco más personal, sobre vuestros exámenes. ¿Cuánto tiempo más o menos dedicasteis al estudio de matrices y determinantes antes del examen?

S: ¿De Selectivo?

E: No, del examen de clase, de la primera evaluación.

M, S: No un tiempo fijo. Durante el trimestre también practicábamos desde que empezamos a dar el tema. De vez en cuando vas haciendo cosas.

E: ¿No lo dejasteis para el final, fuisteis estudiando?

M: El día anterior tienes que mirar todo junto otra vez.

S: Dos días antes es cuando empiezas de verdad a mirar desde el principio.

E: ¿Cómo lo estudiasteis? ¿Os dedicasteis a hacer sólo ejercicios?

M, S: Ejercicios, los de clase otra vez y las propiedades por si acaso.

E: ¿A qué le dedicasteis más tiempo?

M, S: A los ejercicios.

E: ¿Creéis que el tiempo dedicado en clase fue suficiente para haber entendido todo? Lo que le dedicamos en clase a matrices y determinantes para asimilar las propiedades, las definiciones, ¿creéis que llegó el tiempo?

M, S: Yo creo que sí.

E: ¿Y para poder hacer bien el examen?

M, S: Sí.

E: Las notas que tenéis en el primer examen son 7,5 y 6,75. ¿Más o menos concuerda con el tiempo que habíais estudiado o veis poca nota?

M: Yo preparé este examen a última hora.

S: Lo preparé pero quedé insatisfecha y fui a la recuperación a subir nota.

E: ¿En clase creéis que se desarrollaban muchas cosas o que dábamos todo de manera escueta y con ejercicios? ¿Cómo creéis que se plantearon las clases?

M: Para preparar el examen, bien.

Resaltan que de momento no le ven utilidad al tema, pero que suponen que la tiene y que les valdrá para sus estudios posteriores. Sin embargo, no creen que lo necesiten una vez acaben esos estudios y comiencen su vida profesional. En principio le han visto alguna aplicación en otos temas estudiados a lo largo del curso.

E: ¿Creéis que lo que se dio de Álgebra Lineal es útil en Bachillerato?

M: Igual que otros temas; de momento no sé para qué sirven.

S: Útil sí será, si se da.

E: Por vosotras, ¿seguiría en el temario?

M, S: Sí.

E: ¿Pero sí porque se saca buena nota con él o sí porque realmente tiene utilidad?

(risas)

M: Sí, yo creo que es útil.

S: Fuera del Álgebra también se puede utilizar.

E: ¿Para lo que vais a estudiar ahora os va a valer?

M: Aún no lo sé muy bien pero supongo que sí.

E: ¿Tenéis matemáticas en la carrera las dos?

M, S: Sí.

E: ¿Creéis que vais a tocar algo de esto?

S: Yo creo que sí.

M: Creo que más trigonometría y cosas así, pero esto también.

E: ¿Creéis que cuando acabéis la carrera vais a necesitar algo de esto?

M: No lo creo.

S: Supongo que sí que se aplicará para algunas cosas pero no lo sé, la verdad.

E: ¿Durante el resto del curso habéis visto aplicación de matrices y determinantes?

M, S: Sí, para resolver sistemas.

E: ¿Y para algo más?

M: Para geometría, producto vectorial y mixto son determinantes también.

En resumen, de las observaciones anteriores, podemos señalar que las dos alumnas entrevistadas estudiaron Álgebra desde los últimos cursos de primaria. En general, el tema estudiado (matrices y determinantes) les resultó fácil y el tiempo utilizado por la profesora para su enseñanza les pareció suficiente. Además ambas estudiantes coinciden que no saben si estos temas serán útiles para sus estudios futuros pero suponen que sí.

6.5.2.2. Conocimiento de algunos conceptos matemáticos sobre el Álgebra Lineal, complementarios a los que formaron parte de los exámenes.

De las respuestas de las estudiantes se desprende que las alumnas tienen la idea de lo que es una matriz y un determinante, pero no manejan estos conceptos en sentido matemático. Cabe destacar que sus definiciones no son del todo correctas y que presentan cierta confusión en el manejo de algunas operaciones y sus propiedades.

E: Supongo que os acordáis porque habéis hecho ayer Selectividad. ¿Os acordáis qué es una matriz? ¿Podríais explicar qué es una matriz?

S: La forma de poner una tabla.

E: Si se lo explicarais a los que ahora están en primero, ¿qué les diríais?

S: La verdad no sé.

E: ¿Qué operaciones podéis hacer con matrices?

M: Sumar, restar, multiplicar y…división no.

E: Los elementos que tiene una matriz, ¿qué números son?

S: Naturales.

M: Reales.

E: ¿Fracciones?

M, S: Sí, también.

E: ¿Complejos?

S: No los pusimos, no sé si se puede.

E: ¿Qué diferencia hay entre una matriz y un determinante?

M: No sé, cada matriz tiene su correspondiente determinante. De un determinante puedes hallar un solo valor que equivalga a todo.

Además se detectó que las estudiantes no tienen conocimiento sobre lo que significa demostrar un resultado matemático, teniendo confusiones importantes entre la demostración y la comprobación de un resultado.

E: ¿Qué diferencia hay entre una comprobación y una demostración?
M, S: No sé.
M: Demostrar es explicar porqué se puede aplicar una propiedad y comprobar verificar que funciona. Creo que es más o menos lo mismo.
E: ¿Recordáis alguna demostración?
S: Producto de una matriz.
M: Con determinantes.
E: ¿Producto de una matriz con determinantes?
M: ¿Con qué temas: matrices o determinantes?
E: Con cualquiera de los dos.
S: La n-ésima potencia. Hay que demostrar cuál era y con la demostración vemos si es verdad lo que descubrimos en el ejercicio.
M: La comprobación más o menos debe ser lo mismo.

Por todo lo antes expuesto, y a pesar de que las estudiantes entrevistadas obtuvieron buenas calificaciones en los diferentes exámenes[7], los resultados de la entrevista confirmaron las dificultades que presentan estas alumnas en los conceptos básicos del Álgebra Lineal, tales como matriz, determinante o el significado de diversas operaciones realizadas con estos objetos matemáticos. Es de hacer notar que en los exámenes analizados la mayoría de los estudiantes también presentaron dificultades en la comprensión de estos conceptos cuando, por el contrario, no tenían las mismas dificultades a la hora de realizar las operaciones con ellos.

[7] La nota media de fin de curso de ambas alumnas en la asignatura de matemáticas fue 9. Se mantuvo el contacto con ellas durante su primer curso universitario y ambas aprobaron las asignaturas de matemáticas de sus respectivas carreras (Arquitectura e Ingeniería) en su primera convocatoria. Sin embargo en Selectividad sus notas de matemáticas fueron deficientes (3,5 y 5). Ambas alumnas reconocieron que no habían estudiado.

6.5.2.3. Formas de respuesta a algunas preguntas.

En esta parte de la entrevista se nos muestra qué explicación dan las estudiantes entrevistadas a algunos de los errores que cometieron en los exámenes, así como la opinión de algunos de sus compañeros acerca de alguno de los problemas planteados en el examen.

E: Os doy los tres exámenes que hicisteis: el primero es el primer examen de la primera evaluación, el segundo es el de evaluación y el 3º es la recuperación. Echadls un vistazo. Sandra, en el primer examen, el problema 4, que es aplicación práctica, no lo haces y en el siguiente examen lo haces perfecto.
S: En el primer examen lo dejé para el final y no vi cómo hacerlo. Luego me di cuenta.
E: En el segundo examen, ¿lo haces tú sola o alguien te lo había explicado y lo soltaste de memoria?
S: Luego lo entendí pero en el primer examen vi que era un problema y lo dejé para el final.
E: ¿Por qué les tenéis miedo a los problemas? ¿Por qué cada vez que hay un enunciado largo no se intenta?
S: Como es largo ya lleva tiempo leerlo, entenderlo, asimilarlo.
E: ¿Hicimos muchos problemas en clase?
S: Igual que este no. Algunos sí, pero no muchos.
E: Pero con lo que se sabía de clase, ¿se podía abordar bien el problema?
S: Era más difícil plantearlo que resolverlo. Lo difícil era saber lo que te pedía. Cuando sabías lo que había que hacer era muy fácil.
E: Al acabar el examen todos comentáis. Han pasado muchos meses pero, ¿os acordáis más o menos cuál fue el comentario del problema?
M: Hubo de todo. La gente salió diciendo que no se podía hacer y cuando se vio cómo era pensaron que era muy fácil.

Aparecen también errores y dudas acerca de las propiedades de los determinantes, reconociendo la propia alumna que todavía presenta dudas sobre la aplicación de dichas propiedades pese a haber realizado ya el examen de Selectividad.

E: En el primer examen tienes un error en el cálculo del determinante, ¿puedes ver cuál es?
M: Debería multiplicar el número al final, por el resultado del determinante.
E: En este examen tienes un error ahí por las propiedades del determinante y luego tienes estas preguntas en blanco, que son propiedades de los determinantes. ¿Qué pasaba, no las entendías o no las habías estudiado?
M: Ni una cosa ni otra.
E: Ahora están estudiadas, ¿serías capaz de resolver estas preguntas?

M: Sí, en la primera, el determinante de la inversa es 1 partido por el determinante de la matriz. El otro sería 2 por el determinante de la matriz, ¿no?

De las respuestas dadas por estas estudiantes en la entrevista obtenemos que no hay dificultades en abordar un problema similar a los ya realizados pero que estos ejercicios, en su mayoría algorítmicos, presentan errores en su resolución debidos a errores en operaciones simples como puede ser un cambio de signo o una multiplicación simple. Sin embargo, estos ejercicios no presentan dificultades de comprensión. Los problemas no algorítmicos, que requieren el uso de matrices o determinantes para estudiar una situación práctica, son tomados con recelo por los alumnos y muchos de ellos no son resueltos no por no saber resolverlos, sino por no intentarlo siquiera.

6.5.3- Conclusiones de las entrevistas.

En esta sección hemos analizado las entrevistas realizadas a dos estudiantes con el fin de profundizar en sus respuestas a los exámenes y ampliar algunas cuestiones no contempladas en los mismos. Las conclusiones obtenidas son las siguientes.

- Las dos alumnas habían estudiado previamente Álgebra Lineal de forma muy básica en la Enseñanza Obligatoria, aunque nunca matrices y determinantes hasta 2º de Bachillerato.
- Ambas alumnas consideran suficiente el tiempo dedicado a la enseñanza de estos temas.
- Las alumnas coinciden en que de momento no le ven utilidad al tema pero que creen que serán necesarios estos conocimientos para proseguir estudios posteriores. Coinciden también en que no creen que tengan que utilizarlos una vez que comiencen su vida profesional, después de acabar sus estudios universitarios. Hay que destacar que no son sólo los alumnos de este curso los que sienten que este tema no tiene utilidad: Rodríguez (1999) señala que la única utilidad de las matrices y determinantes, tal y como se plantean en este curso, es la resolución de sistemas de ecuaciones.
- La única aplicación vista por las alumnas, fuera del campo conceptual del Álgebra Lineal, está en las propias matemáticas, en el campo de la Geometría. La intuición geométrica es importante en el estudio del Álgebra, aunque

para algunos autores (Robert, Robinet y Tenaud, 1987) es problemática y para otros (Guedet-Chartier, 2000) se aborda de manera superficial.

- A pesar de que las estudiantes entrevistadas obtuvieron buenas calificaciones en la prueba, los resultados de la entrevista confirmaron las dificultades que presentan estas alumnas en los conceptos básicos del Álgebra Lineal, en concreto en los conceptos de matriz y determinante. Es de hacer notar que, en los exámenes, la mayoría de los estudiantes también presentaron dificultades en la comprensión de estos conceptos.
- Finalmente, en el curso de la entrevista las alumnas ratifican la deficiencia mostrada al entender la matemática en su versión teórica, al no distinguir con claridad, por ejemplo, las diferencias entre comprobar y demostrar.

Creemos, por tanto, que podemos confirmar la hipótesis H2. Un primer paso para confirmar esta hipótesis viene dado por los resultados obtenidos en el estudio de los exámenes. El porcentaje de respuestas correctas en los ejercicios de cálculo era notablemente mayor que en aquellos que exigían una mayor comprensión de los conceptos teóricos. Las mayores dificultades se encontraron en aquellos problemas que necesitan de una modelización algebraica (grupo 6), cuando estos son para algunos autores (Pavlopoulou, 1993, Hillel, 2001) los fundamentales para una buena comprensión del Álgebra Lineal. Los más sencillos (tras incluir en el estudio las respuestas parcialmente correctas) han resultado ser los ejercicios de cálculo. En algunos grupos se han encontrado porcentajes muy altos de respuestas en blanco lo que indica la dificultad que tienen los alumnos para abordar los problemas que utilizan la notación matricial, las propiedades de los determinantes y los problemas de traducción al lenguaje algebraico. Por el contrario, las preguntas de Selectividad, los ejercicios de cálculo y las preguntas teóricas sólo presentan un 8,1%, 5,7% y 3,6%, respectivamente, de respuestas en blanco.

Las entrevistas realizadas refuerzan la confirmación de la hipótesis. Las alumnas aseguran que no podrían explicar a un alumno de un curso inferior qué es una matriz (dicen que es la forma de poner una tabla) y no dan una buena introducción de lo que es un determinante. Sin embargo reconocen no haber tenido problemas para preparar la asignatura y utilizar los algoritmos de cálculo.

Por tanto, postulamos que se verifica la hipótesis H2: *los alumnos presentan dificultades en la comprensión de los conceptos pero no en la utilización de los algoritmos de cálculo.*

Capítulo 7.
Conclusiones.

7.1- *Introducción.Reflexiones sobre la investigación.*

En la introducción general de esta memoria comenzamos indicando que el objetivo de esta investigación era la realización de un análisis didáctico de los conceptos de matriz y determinante, lo que según nuestro punto de vista comprende el estudio de la génesis epistemológica de los mismos, del estatuto que reciben en la enseñanza y la caracterización de los significados personales de los estudiantes sobre dichos objetos. En suma, consideramos necesario que las investigaciones didácticas aporten conocimientos que clarifiquen el significado de los objetos matemáticos, su evolución, los papeles específicos que desempeñan en la institución escolar, así como las tipologías de las relaciones posibles de los sujetos a los objetos matemáticos. La identificación de las restricciones que ofrece el funcionamiento de los sistemas didácticos en su contexto sociocultural, para la adecuada progresión de los conocimientos de los alumnos, es también objetivo de nuestra investigación.

El aprendizaje adquirido y la reflexión que hacemos, a partir de esta investigación, nos lleva, sobre todo, a tomar conciencia de que tenemos que seguir investigando sobre los procesos de comprensión de nuestros alumnos (Sierpinska, 1990) y, si queremos aproximarnos cada vez más a una comprensión más completa de los mismos, son necesarios más estudios y la consideración de factores que aquí no contemplamos. Por otra parte, éstos mismos, aprendizaje y reflexión, incumben directamente a esta profesora, preocupada por la calidad de su propia práctica, la cual debe ser responsable, consciente y mediadora de los procesos de aprendizaje cognitivo de sus alumnos. Creemos que, por sí sola, esta reflexión ya justificaría este estudio, es decir, la importancia que tiene para el propio desarrollo profesional de la investigadora.

Comenzábamos preguntándonos por las etapas de desarrollo histórico-epistemológico de matrices y determinantes. Como conclusión, señalamos que estos conceptos surgen como consecuencia del estudio durante siglos de los sistemas de ecuaciones lineales y sus métodos de resolución. La idea de determinante precede al de matriz, las cuales aparecen más adelante como una manera cómoda de expresar un sistema de ecuaciones. Como decía Leibniz, una buena notación matemática es la llave del progreso.

Quizás debíamos preguntarnos que si el desarrollo del Álgebra Lineal parte de los sistemas de ecuaciones y su resolución por método de Gauss (que ya vimos que era usado, de manera informal, mucho siglos antes de la época de Gauss), para pasar al estudio de determinantes y posteriormente al de matrices, ¿por qué entonces estamos exponiendo en el aula, y aparece en los currículos, un orden completamente distinto en la secuenciación de estas unidades didácticas? Recordemos, además, que muchos libros de texto incluyen, como primer tema de curso, antes de comenzar el estudio de matrices, un tema previo que estudia la resolución de sistemas de ecuaciones por el método de Gauss.

Actualmente el uso de matrices y determinantes no se reduce únicamente al campo de los sistemas de ecuaciones. El estudio de cónicas y cuádricas, transformaciones lineales, derivadas de orden superior de funciones de varias variables, entre otras cosas, sería inviable sin la utilización de estos objetos. El estudiante de secundaria puede, asimismo, comprobar también su uso en otros apartados del temario, como el estudio de posiciones relativas de rectas y planos en el espacio o los cálculos del producto vectorial y el producto mixto.

La enseñanza del Álgebra comienza en el 2º curso de la ESO, con el estudio de la ecuación de primer grado y los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. A partir de ahí el Álgebra es una constante en los planes de estudio hasta 2º de Bachillerato, donde se estudian las matrices y determinantes. Además en primer curso de Bachillerato, el método de Gauss aparece como contenido propio, lo que permitiría al profesor introducir en el aula la notación matricial, aunque no se defina la matriz como objeto matemático.

Después de analizar los sucesivos planes de estudio, llegamos a la conclusión de que el currículo elaborado por la Xunta de Galicia, en 2002 y 2007, está más elaborado que los anteriores, en el sentido de que, además de los contenidos, aparecen los objetivos a conseguir, las capacidades a lograr, las actitudes que se quieren inducir en los estudiantes y los criterios de evaluación a seguir. Además, aparece como objetivo de la enseñanza la resolución de problemas matemáticos.

En los libros de texto se tiende a introducir las matrices por medio de situaciones prácticas, incluso a partir de los sistemas de ecuaciones; esta es una actividad que aparece en el libro de texto utilizado de 2º de Bachillerato. Los determinantes, por el contrario, no aparecen dentro de ninguna situación que pudiéramos calificar como práctica, sino sólo teóricamente.

Una pregunta hecha al principio del trabajo y, a nuestro modo de ver una de las más difíciles de contestar, es si sobraría o faltaría algo en la enseñanza del Álgebra Lineal en secundaria. Es un hecho bien conocido que los problemas que se formulan en la Selectividad, modifican un ritmo de aprendizaje que a muchos profesores les parecería más adecuado: los temarios son extensos y es preciso acabarlos para que el alumno no se presente a dicho examen sin haber estudiado alguno de esos temas; por tanto, a la hora de contestar qué se echa en falta, hemos de ponernos en una situación ideal de disponer del tiempo que consideremos necesario para impartir esta materia. En caso de hablar de una situación real, tendríamos que eliminar alguna otra parte del temario, lo que nos llevaría a un debate que no tiene objeto en este trabajo.

Los exámenes analizados demuestran que el tema resulta difícil a los alumnos, siendo las actividades más sencillas y con mayor porcentaje de respuestas correctas los ejercicios de cálculo. Quizás está ahí la clave para entender porqué las notas en esta parte son mejores que en el resto del curso: en los exámenes se da más importancia a los ejercicios de cálculo, que son los que más fáciles resultan a los alumnos. Esto se comprueba también con las entrevistas realizadas donde se aprecia que alumnas con buenas calificaciones reconocen que esta parte no la vieron difícil. Sin embargo presentan debilidades ostensibles en la comprensión de conceptos básicos.

Consideramos que esta investigación es básicamente descriptiva y explicativa. Se han intentado describir con detalle el currículo, los libros de texto analizados y los exámenes realizados por los alumnos, y se ha podido detectar el porqué de algunas respuestas dadas por los alumnos, mediante la entrevista realizada a dos de ellos. Además se han analizado una serie de exámenes de Selectividad. Por tanto, creemos que hemos estudiado algunas de las variables nucleares que intervienen en el proceso educativo. Hemos excluido la propia práctica docente por dos razones. La primera, por una cuestión de tiempo: evaluar la práctica docente constituía un trabajo muy amplio. La segunda razón tiene que ver con las características del curso: el profesor puede personalizar mucho menos sus clases que en otros cursos. La mayoría de los docentes se ciñen a las pautas marcadas por la Comisión Interuniversitaria Galega y procuran plantear en sus aulas la mayor cantidad posible de actividades presentes en Pruebas anteriores. Por ese motivo nos ha parecido mucho más realista estudiar el currículo y las Pruebas de Acceso en lugar de la práctica docente.

Hemos intentado definir los objetos matemáticos presentes en la investigación en el apartado dedicado a la epistemología, ver sus relaciones y sus posibles aplicaciones. La teoría abarca un amplio rango de fenómenos, ya que el Álgebra Lineal supone la tercera parte de los contenidos de 2º de Bachillerato y de hecho, las actividades propuestas en las Pruebas de Selectividad correspondientes a este apartado valen 3 puntos. Además un estudio de este tipo puede dar pie a nuevas investigaciones sobre ciertos aspectos del Álgebra en otros cursos, ya sean superiores o inferiores.

El criterio de selección de libros de texto se ha basado en su nivel de impacto en los institutos gallegos, tanto en el plan de estudios anterior como en el actual, y para seleccionar los exámenes de Selectividad hemos considerado los más recientes. Es más difícil repetir las mismas condiciones en los exámenes realizados a los alumnos, pero, como ya hemos dicho, la mayoría de los profesores se ciñen bastante al currículo, por lo que los exámenes planteados por ellos no suelen presentar demasiadas variaciones.

El instrumento de evaluación de la muestra de estudiantes utilizado es simple, pero realista. Al haber utilizado exámenes ya realizados antes de plantear la investigación, las preguntas de los mismos no han sido manipuladas para estudiar determinados ítems, sino que han sido exámenes reales planteados en el aula. Esto trae la dificultad de su interpretación, ya que los ítems tuvieron que adaptarse a la prueba, y no la prueba a los ítems. Sin embargo, consideramos que es un instrumento de trabajo con muchas posibilidades. Así, podemos observar la distinta importancia que se otorga a los diferentes ítems: en 167 exámenes estudiados hemos encontrado 562 respuestas que corresponden a ejercicios de cálculo, frente a 56 respuestas correspondientes a preguntas teóricas.

7.2- *Conclusiones sobre las hipótesis formuladas en el problema de investigación.*

Es ahora el momento de sintetizar, a la vista de los análisis realizados, hasta qué punto nuestras hipótesis de investigación han sido verificadas total o parcialmente, o si hay que rechazar alguna de ellas.

> H1) *En la época de vigencia del anterior plan de estudios, el estudio de los espacios vectoriales constituía un contenido propio, y su aplicación a la enseñanza de las matrices propiciaba un enfoque formal de dichos objetos. En la época actual, aunque el tema de espacios vectoriales no se estudia como tal, encontramos referencias a objetos de dicha organización matemática. Por ejemplo, en las definiciones de las operaciones con las matrices o el método de Gauss, estamos usando aspectos de la teoría de espacios vectoriales de forma implícita, abordando los mismos tipos de situaciones-problema que en el plan de estudios anterior (faceta epistémica), aunque de manera más desestructurada, lo que puede originar conflictos semióticos en los estudiantes.*

Las conclusiones más significativas obtenidas, en relación con esta hipótesis, se derivan de los análisis de textos realizados, que se recogen en los capítulos 4 y 5 de esta memoria.

La comparación entre un texto de Matemáticas de COU y otro de 2º de Bachillerato-LOGSE, utilizando las categorías presentadas por González y Sierra (2004), muestra que:

- El texto Matemáticas-COU de Vizmanos y Anzola (1989), sigue un planteamiento clásico en cuanto a la estructura de los problemas presentados y el desarrollo de los conceptos teóricos, aunque estas descripciones teóricas intentan mezclar lo puramente formal con lo intuitivo. El libro no presenta ninguna tabla y pocas gráficas, intentando en éstas utilizar números en vez de notaciones simbólicas y en ningún momento se pretende una construcción por parte del alumno; únicamente una visualización. En cuanto a sus expresiones simbólicas, procura mezclar lo general con lo específico, dándoles un carácter más concreto. Por ejemplo: se utiliza V para designar al espacio vectorial y presentar sus propiedades, pero se ejemplifica con R, R^2 y R^n. La semántica del libro se presenta en un contexto expositivo; la importancia reside en los objetos matemáticos, en su descripción, sin intentar un enfoque realista. Los ejercicios son rutinarios y las definiciones adquieren relevancia por su estructura, y por servir de instrumento de aplicación a los ejercicios. Postulamos que el tratamiento dado al Álgebra Lineal se caracteriza por ser especialmente "matemático", en el sentido de que no se muestran actividades que relacionen estos objetos matemáticos con campos de problemas determinados (Godino y Batanero, 1994b, Godino, 2002b). El libro presenta un contexto intemporal, con influencias didácticas determinadas por la adaptación al currículo, con expresiones simbólicas clásicas y formalistas. Estamos ante un libro *expositivo.*

- El libro 2º de Bachillerato LOGSE de Colera, García y Oliveira, (2003), sigue manteniendo una estructura clásica en la presentación de los contenidos, pero ya no es fundamentalmente teórico. La matemática ya no se expone por sí misma y se intentan buscar relaciones entre los objetos matemáticos, sobre todo los correspondientes a sistemas de ecuaciones lineales, matrices y posiciones relativas de rectas y planos en el espacio. Se intenta que los términos usados no tengan una formalidad excesiva, sino un carácter más comprensivo e intuitivo. El perfil de este libro tiene un carácter tecnológico, aunque en cierto aspectos, como el sintáctico o el pragmático-didáctico presenta un perfil que intenta facilitar la comprensión, aunque a nuestro juicio, no logre una *idoneidad epistémico-cognitiva* adecuada (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006). Esto, junto a los demás aspectos analizados en este capítulo hace que sea posible establecer una comparación entre ambos textos y, por tanto, por ser representativos de los significados de referencia en estos cursos, intentar extrapolarla a una comparación entre los significados pretendidos e implementados (Godino y Font, 2007) en ambos planes de estudio.

Por otro lado, también encontramos rasgos comunes en ambos libros. Hay una programabilidad de los saberes, es decir, existe un inicio y una secuenciación. También, hay una textualización del saber (Ruiz, 1993), es decir, una organización discursiva del conocimiento objetivo, que se traduce en:

- Una despersonalización del saber: hay una separación de la problemática de los matemáticos que se ocuparon de su génesis y desarrollo. En ninguno de los textos se llega a los resultados sobre matrices y determinantes utilizando el mismo camino que utilizaron los distintos investigadores.
- Una delimitación en saberes parciales: los distintos resultados se van presentando y luego se acoplan según las necesidades estructurales del sistema didáctico.
- Una *atomización* (Bolea, Bosch y Gascón, 2001) de los saberes parciales: cada objeto estudiado puede ser autónomo en el tratamiento dado por el sistema didáctico. De hecho, tanto los programas como los libros de texto, presentan por separado las unidades de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.
- Una explicitación de algunas nociones matemáticas: las matrices son introducidas como objeto de estudio aunque antes se habían utilizado como instrumento para resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss.
- Un uso implícito de nociones paramatemáticas y protomatemáticas (Chevallard, 1999). Hay nociones indispensables para la actividad matemática que no se introducen como objeto de estudio, bien por haberlas estudiado en cursos anteriores (concepto de ecuación, incógnita, variable,…) o por considerarlas de especial dificultad en este curso (aplicaciones lineales y multilineales)

La aplicación de la técnica del análisis semiótico, que proporciona el EOS, a las unidades 2 y 3 del texto Matemáticas II 2º de Bachillerato ya comentado de Colera, García y Oliveira (2003), nos ha permitido extraer las siguientes conclusiones:

1. En ningún momento del proceso de estudio se hace referencia a cómo aparecen históricamente las matrices y determinantes. Como sabemos, la idea de determinante precede a la idea de matriz y ambos surgen a partir del estudio de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Aunque el bloque de Álgebra Lineal consta de cuatro unidades, siendo la primera de ellas los Sistemas de Ecuaciones y Método de Gauss, las unidades 2 y 3, correspondientes a Matrices y Determinantes no hacen ninguna referencia a los sistemas de ecuaciones, por lo que su estudio queda descontextualizado. Las matrices se definen como tablas numéricas rectangulares y los determinantes como

números que se obtienen operando de cierta manera con los elementos de una matriz cuadrada. Sólo al comienzo de la unidad 4, Resolución de sistemas mediante determinantes, de la cual no se realizó un análisis semiótico, se hace un desarrollo del concepto de determinante, partiendo de un sistema 2×2 (pag 98), similar al realizado por MacLaurin en 1729, aunque sin hacer referencia a éste.

2. Aunque resulta obvio que en 2º de Bachillerato no podemos abordar todos los conceptos desde un punto de vista histórico, por múltiples razones (tiempo didáctico, alejamiento de la zona de desarrollo potencial [Vygotsky, 1934], etc), nos parece que las definiciones presentadas, sobre todo en el caso de la noción de matriz, no permiten a los estudiantes observar, con claridad, cuál es el papel de estos objetos dentro de las matemáticas, hecho que se pone de manifiesto en el propio texto, a la vista de las dificultades que tiene para dar una definición clara de los conceptos de matriz y determinante. Por otro lado no se presenta ninguna situación que haga ver al estudiante la necesidad de introducir nuevos objetos matemáticos para su resolución. Por ejemplo, partiendo del método de Gauss, se puede plantear un sistema de ecuaciones cuyas operaciones se compliquen mucho al usar este método (coeficientes fraccionarios o irracionales), que haga ver a los estudiantes la necesidad de buscar técnicas más adecuadas para resolverlo. Esto puede justificar la introducción de determinantes en la unidad 3.
3. Con respecto a la noción de rango de una matriz, creemos que el texto plantea un proceso muy largo para introducir este concepto y su cálculo, lo que puede ocasionar conflictos al estudiante para interpretarlos. En la unidad 3, se define rango como el máximo orden de los menores no nulos y se intenta justificar con la definición dada en la unidad anterior y con la propiedad 9 de los determinantes.
4. En las unidades analizadas, en general, nos parece pertinente la notación utilizada por el libro de texto. No obstante, el uso de las notaciones $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para referirnos a los elementos del espacio vectorial, nos parece un tanto confusa. El alumno de 2º de Bachillerato identifica la notación $\vec{u}$ con un vector del plano. Además, en los cursos de 4º de ESO y 1º de Bachillerato, especialidad de Ciencias y Tecnología, que es donde se estudian los vectores en el plano,

se recalca al alumno la importancia de colocar la flecha para "distinguir números y vectores". Por tanto, en el instante que se afirma que las matrices forman un espacio vectorial se puede generar un conflicto semiótico, ya que en ningún momento se ha denotado una matriz o n-upla poniendo una flecha. Consideramos que el uso de esta notación puede dificultar el desarrollo del razonamiento abstracto que se pretende ir construyendo progresivamente.

5. Se detecta, con demasiada frecuencia, una ausencia de justificación de algunas de las propiedades mencionadas, como por ejemplo que el producto de matrices no es conmutativo. En este caso se ponen ejemplos en los "ejercicios resueltos", pero se pide al lector que compruebe él mismo la propiedad con algunos ejemplos. El texto menciona que $A \cdot B \neq B \cdot A$ pero no que hay casos en los que podemos calcular $A \cdot B$ pero no $B \cdot A$. También falta justificación en el caso de la matriz inversa. Se menciona que no todas las matrices cuadradas tienen inversa, pero se deja la argumentación para dos temas más adelante. No se justifica que puede no existir la matriz inversa de una matriz cuadrada concreta.
6. No se contextualiza qué tipo de problemas pueden resolverse utilizando estos objetos matemáticos. A lo largo del desarrollo del curso el alumno verá aplicaciones del Álgebra Lineal en el campo de la Geometría, ya que estudiará posiciones relativas de rectas y planos en el espacio y producto vectorial y mixto de vectores. Quizás alguna referencia a esto en los contenidos teóricos de Matrices y Determinantes sería de gran utilidad para el alumno, ya que le permitiría dar un sentido a aquello que estudia de manera abstracta, y sin percibir sus "sentidos" (Font, 2005).
7. En relación con la dimensión técnica u operatoria, ésta está presente en los procedimientos empleados para usar las técnicas de las diferentes operaciones que se pueden realizar con matrices y el cálculo de determinantes de diferentes formas. Se echaría de menos, una vez más, el uso de esta componente en la deducción del proceso a seguir para resolver los problemas de aplicación a la vida cotidiana, usando las nociones estudiadas. En especial en el tema de Determinantes.
8. La componente proposicional y validativa relaciona las características de los conceptos de matriz y determinante. Se hace especial hincapié en las condiciones que han de cumplir las matrices para que se puedan sumar y multipli-

car, en las propiedades de las operaciones con matrices y en aquellas propiedades que ayudan a comprender el concepto de rango. A esto último se hace también mención en el tema de Determinantes, insistiendo asimismo en las propiedades de estos objetos.

9. La componente argumentativa es más parca que las demás componentes, en particular la proposicional, ya que la mayoría de las proposiciones y propiedades enunciadas se justifican a través de ejemplos. Encontramos pocas justificaciones de técnicas apoyadas por la componente teórica (tecnologías y teorías) (Chevallard, 1999).

Las conclusiones anteriores avalan la confirmación de la hipótesis H1, a la que debemos añadir, además, que el estudio atomizado, descontextualizado y, en ocasiones, desestructurado que revela el análisis semiótico, es una potencial fuente de numerosos conflictos semiótico-cognitivos de los estudiantes, que les conduce tácitamente al refugio en las rutinas algorítmicas.

H2) Los estudiantes de 2º de Bachillerato presentan dificultades en la comprensión de los conceptos básicos del Álgebra Lineal, pero no en la utilización de sus algoritmos de cálculo. (faceta cognitiva).

Exponemos, a continuación, las conclusiones más relevantes obtenidas a partir del estudio que hemos realizado con una muestra de 167 estudiantes, usando como instrumento pruebas de evaluación, sobre la temática Matrices y Determinantes, en 2º curso de Bachillerato, y una entrevista realizada a dos estudiantes de este nivel educativo. Dicho estudio se recoge en el capítulo 6 de esta memoria:

1. Conclusiones de las pruebas de evaluación.

- La prueba, en general ha sido difícil, para los alumnos. En algún grupo de ítems (6), no llega al 40% el porcentaje de respuestas correctas. El porcentaje medio de respuestas correctas fue el 45,8%, analizando un total de 167 exámenes. Sólo tres alumnos respondieron correctamente a la totalidad del examen.
- Las mayores dificultades se encontraron en aquellos problemas que necesitan una modelización algebraica (grupo 6). Los más sencillos (tras incluir en el es-

tudio las respuestas parcialmente correctas) han resultado ser los ejercicios de cálculo matricial.

- En algunos grupos (2,5,6) se han encontrado porcentajes muy altos de respuestas en blanco lo que indica la dificultad que tienen los alumnos para abordar estos problemas debidos a conflictos semióticos situacionales y/o conceptuales. Estos grupos corresponden a los ejercicios que utilizan la notación matricial, las propiedades de los determinantes y los problemas de modelización algebraica. Por el contrario, las preguntas de Selectividad, los ejercicios de cálculo y las preguntas teóricas sólo representan un 8,1%, 5,7% y 3,6%, respectivamente, de las respuestas en blanco.
- En general, se observan muchas dificultades a la hora de utilizar una notación adecuada. Parece como si los alumnos sólo se preocuparan de conseguir un resultado final, sin preocuparles cómo describir correctamente los procesos que ponen en juego y las justificaciones del mismo
- Encontramos que los alumnos no tienen apenas dificultades en abordar problemas "tipo", es decir, muy similares a los que encontramos en los libros de texto, pero que fallan si el problema contiene algún detalle que lo haga diferente. Por ejemplo, si tienen que desarrollar un determinante por una columna, realizan bien el cálculo si en la columna de ceros el otro elemento es un 1, pero se equivocan si aparece un número distinto de 1. Otro ejemplo es la dificultad para plantear y resolver por el método de Gauss sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, mientras que resuelven perfectamente los de tres ecuaciones, que son los que aparecen mayoritariamente en los libros de texto de este nivel.

Hemos realizado un estudio detallado de los errores en cada una de las preguntas. Los principales errores detectados son los siguientes:

- Errores en operaciones simples (sumas, restas,…) que conducen a errores de bulto a lo largo del ejercicio. El alumno no se da cuenta de la incoherencia de algunos resultados. No verifica los mismos, mostrando una acusada falta de espíritu crítico. Esto hace que tengamos grandes diferencias entre la distribución de respuestas correctas y la que incluye las respuestas correctas y las parcialmente correctas.

- Aplicación incorrecta de resultados teóricos, sobre todo al aplicar el teorema de Rouché-Fröbenius y las propiedades de los determinantes.
- Dificultades en manejar situaciones diversas que dependan de un parámetro.
- Imprecisión en las definiciones de conceptos, que indican una comprensión insuficiente.
- Confusión entre la notación y concepto de matriz y determinante.
- Realización incorrecta de demostraciones, exceptuando aquellas vistas con anterioridad en clase y que sólo suponen una memorización.

Como conclusión general postulamos que el tema tiene una notable dificultad para los alumnos de 2º de Bachillerato, aunque no parece que aquellos ejercicios que consistan únicamente en la repetición de una rutina les resulten complicados. Los estudiantes tienen dificultades en la comprensión y aplicación de los conceptos teóricos y el éxito que tienen en las respuestas a las preguntas teóricas de los exámenes se asocia con la repetición de las demostraciones vistas en clase, faltándoles conocimientos teóricos suficientes para abordar otro tipo de justificaciones.

2. Conclusiones de las entrevistas.

En relación con el análisis de las entrevistas realizadas a dos estudiantes, con el objetivo de profundizar en las justificaciones de sus respuestas en los exámenes y ampliar algunas cuestiones no contempladas en los mismos, concluimos que:

- Las dos alumnas habían estudiado previamente Álgebra Lineal de forma muy básica en la Enseñanza Obligatoria, aunque nunca matrices y determinantes hasta 2º de Bachillerato.
- Ambas alumnas consideran suficiente el tiempo dedicado a la enseñanza de estos temas.
- Coinciden en que, de momento, no le ven utilidad al tema pero creen que serán necesarios estos conocimientos para proseguir estudios posteriores. Coinciden también en que no creen que tengan que utilizarlos una vez que comiencen su vida profesional, después de acabar sus estudios universitarios.

- A pesar de las buenas calificaciones que obtuvieron en la prueba de evaluación, los resultados de la entrevista confirman las dificultades que les plantean los conceptos básicos del Álgebra Lineal, en concreto los conceptos de matriz y determinante, al igual que la mayoría de los estudiantes.
- Finalmente, en el curso de la entrevista, las alumnas ratifican las dificultades para entender las reglas formales de la matemática, al no distinguir con claridad, por ejemplo, las diferencias entre comprobar y demostrar.

Consideramos, por tanto, que podemos confirmar la hipótesis H2. Un primer dato que avala la confirmación de esta hipótesis viene dado por los resultados obtenidos en el análisis de los exámenes. El porcentaje de respuestas correctas en los ejercicios de cálculo era notablemente mayor que en aquellos que exigían una mayor comprensión de los conceptos teóricos. Las mayores dificultades se encontraron en aquellos problemas que necesitan de una modelización algebraica (grupo 6). En algunos grupos se han encontrado porcentajes muy altos de respuestas en blanco lo que indica la dificultad que tienen los alumnos para abordar los problemas que utilizan la notación matricial, las propiedades de los determinantes y los problemas de traducción al lenguaje algebraico.

Otro dato que apoya la confirmación de H2 son los resultados de las entrevistas realizadas. Las alumnas aseguran que no podrían explicar a un alumno de un curso inferior qué es una matriz (dicen que es la forma de poner una tabla) y no son capaces de proponer una definición plausible de lo que es un determinante. Sin embargo reconocen no haber tenido problemas para preparar la asignatura y utilizar los algoritmos de cálculo.

H3) *Uno de los objetivos de la enseñanza de matrices y determinantes es utilizar el lenguaje matricial y sus operaciones como instrumento para representar e interpretar datos y relaciones, así como expresar en lenguaje algebraico problemas de ámbito cotidiano (p.e., económicos y sociales). Sin embargo, las Pruebas de Acceso a la Universidad presentan mayoritariamente ejercicios rutinarios. (faceta instruccional)*

No insistiremos de nuevo en que, tanto el análisis que hemos realizado de tres textos, como los resultados obtenidos de la evaluación de la muestra de estudiantes considerada, avalan esta hipótesis.

Por otra parte, tras analizar el contenido de diversos exámenes de Selectividad hemos llegado a las siguientes conclusiones:

- No encontramos auténticos problemas en estas pruebas. Se pretende comprobar con ellas si el alumno ha logrado el dominio de ciertas técnicas y sabe relacionar algunos conceptos y aplicar algunas propiedades que se estudian en 2º de Bachillerato. Además, la única actividad que realmente se podría considerar problema tiene un contenido estrictamente matemático: *Demuestre que toda matriz cuadrada 3-dimensional se puede escribir como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.*
- Las actividades rutinarias son mucho más numerosas que aquellas que exigen al alumno alguna reflexión previa para resolverlas: 71,9% frente a 27,1%. La mayoría de las actividades propuestas sólo necesitan de la aplicación de un algoritmo para ser resueltas.
- Muchas de las actividades propuestas en estas pruebas coinciden con actividades propuestas en los libros de texto, lo que le permite al alumno estar “entrenado” para resolver un tipo de situaciones rutinarias.
- La mayoría de las actividades consideradas “de aplicación” siguen siendo actividades que quedan dentro del campo de las matemáticas.
- Aparecen actividades que obligan al alumno, explícitamente, a utilizar una notación matricial. Esto suele suponer un conflicto ya que el alumno no considera, por lo general, importante cuidar su forma de escribir sus procesos con una simbología matemática específica (en este caso impuesta). Por otro lado, para un alumno las incógnitas de un sistema de ecuaciones se suelen llamar *x, y, z* o *a, b, c*, por lo que es sorprendente para ellos la aparición de otros nombres de variable, más aun si éstos llevan subíndices.
- La interpretación de resultados es, en la mayoría de los casos, conflictiva para los estudiantes, acostumbrados a resolver un problema numérico y dar únicamente soluciones numéricas. Por tanto, actividades similares a las del punto 2 del apartado 4.7 representan un verdadero problema.
- No es habitual que se demande una justificación de los procesos y resultados obtenidos, aunque muchas veces esta justificación está implícita en el propio resultado. El hecho de exigirla suele originar sorpresas y conflictos en el alumnado.

Consideramos que las Pruebas de Acceso a la Universidad presentan mayoritariamente ejercicios rutinarios, no verdaderos problemas, lo que refuerza la confirmación de la hipótesis H3.

7.3- *Implicaciones para la enseñanza/aprendizaje del Álgebra Lineal.*

Uno de los propósitos de este estudio es fomentar, en las aulas, la reflexión sobre los resultados de nuestros análisis. Por tanto, pensamos que esta investigación puede resultar útil a los profesores de matemáticas, para disponer de información sobre algunos fenómenos didácticos que pueden plantearse en su trabajo diario. También puede suponer una ayuda para todas aquellas personas encargadas de elaborar los currículos y las Pruebas de Selectividad, ya que se detectaron posibles sesgos o desajustes en los contenidos de dichas pruebas. Las dificultades, conflictos y errores que hemos detectado en los estudiantes en su forma personal de entender el Álgebra Lineal y el análisis de posibles causas de estos errores, nos permitirá reflexionar sobre alternativas didácticas enfocadas a la superación de los mismos.

Se ha puesto de manifiesto cómo el sistema didáctico produce determinadas restricciones sobre cada uno de sus elementos constitutivos, así como entre las relaciones que se establecen entre ellos. Estas restricciones se han identificado específicamente para el caso de los objetos matriz y determinante. El conocimiento de estas restricciones es necesario para poder identificar el dominio de las modificaciones que didácticamente son posibles para intentar contribuir a la mejora del aprendizaje de los estudiantes.

Es necesario establecer una diferenciación entre aquello que se enseña y aquello que el alumnado aprende y que manifiesta a través de sus producciones. Por lo tanto, es necesario hacer hincapié, en las clases de matemáticas, en la argumentación de procesos e interpretación de resultados. Esto último tiene relación con la cuestión planteada al principio acerca de la necesidad de introducir matrices y determinantes como contenidos propios del temario o, si por el contrario, se podrían introducir como simples notaciones formales y algoritmos de cálculo. En nuestro estudio observamos que el énfasis se pone en los aspectos que afectan al cálculo. Los sentidos de las nociones, propiedades, relaciones y, en general de los aspectos teóricos que los justifican, es decir la verdadera esencia del conocimiento matemático, quedan bastante relegados.

Somos conscientes de la importancia nuclear del Álgebra Lineal como obra matemática. En particular de las nociones de matriz, determinante y su vasto campo de aplicación. En este sentido, consideramos que una (re)contextualización que dote de sentido a estas nociones, sus propiedades, sus conexiones con otros objetos matemáticos, es necesaria. También somos conscientes de la dificultad que tiene esta reinterpretación dentro del contexto de la enseñanza secundaria, ya que para poder llevarla a efecto, muy probablemente habrá que darle más espacio en el currículo, bien en el propio curso o introduciendo algunas nociones previas relacionadas en cursos anteriores.

7.4- *Cuestiones abiertas.*

A pesar del ámbito limitado del contenido matemático abarcado por nuestra investigación y el esfuerzo que hemos dedicado a desvelar algunos de los problemas didácticos observados en los procesos de enseñanza-aprendizaje de matrices y determinantes, creemos que sólo hemos realizado aportaciones a algunas de las múltiples cuestiones que resultarían pertinentes. Por tanto, queda un amplio campo de trabajo de investigación por realizar sobre la problemática didáctica de la enseñanza/ aprendizaje del Álgebra Lineal en el Bachillerato español.

A título de ejemplo, mencionamos algunas de las cuestiones sobre las que habría que investigar y que, también, formará parte de nuestra futura actividad investigadora:

1) Análisis del impacto de las nuevas tecnologías, en particular de los programas informáticos de cálculo simbólico, numérico y gráfico sobre la enseñanza y aprendizaje de los objetos matriz y determinante. Se dispone, desde ya hace algunos años, de instrumentos que permiten la representación y manipulación simbólica de estos objetos; esto induce nuevos sistemas de enseñanza interactivos y, en consecuencia, nuevos significados sobre este concepto. Además estos instrumentos evolucionan muy rapidamente y ofrecen cada vez mayores posibilidades. Se plantea el problema de estudiar qué aspectos del Álgebra Lineal se podrían enfatizar y cuáles pasarían a segundo plano o desaparecerian, y cómo sería posible su integración en el currículo matemático y en las Pruebas de Acceso a la Universidad. Queda, por tanto, abierta la cuestión de en qué medida las herramientas informáticas pueden contribuir a acercar los significados personales de los alumnos a los significados instucionales relacionados con el Álgebra Lineal.

2) Teniendo en cuenta la tipología de inconsistencias, obstáculos y restricciones en el funcionamiento de los sistemas didácticos identificadas en nuestra investigación, resulta necesario elaborar propuestas didácticas alternativas, de carácter curricular, para los distintos niveles de enseñanza secundaria y, en especial, para el curso de 2º de Bachillerato, que ofrecieran a los profesores una tecnología didáctica que permitiese afrontar de manera más idónea la enseñanza del Álgebra Lineal.

3) ¿Hay desajustes curriculares en otras obras matemáticas, objeto de estudio en el Bachillerato (Geometría, Análisis..), similares a los localizados para el Álgebra Lineal? Podríamos plantear, por ejemplo, un estudio de exámenes de Selectividad sobre estas partes de las Matemáticas y comparar sus resultados con los de este estudio o estudios similares, para estudiar posibles relaciones o dependencias entre ellas.

4) ¿Sería posible recontextualizar y repersonalizar el estudio del Álgebra Lineal, teniendo en cuenta las restricciones actuales de los sistemas didácticos?

Estas y otras cuestiones, tanto o más importantes que las señaladas, deberán ser objeto de nuevos estudios y experiencias didácticas. Disponemos de programas de investigación, en continuo desarrollo y evolución, para apoyar científicamente estos nuevos retos, con el objetivo de comprender mejor esta problemática y poder contribuir al esfuerzo conjunto de hacer más significativa la enseñanza/aprendizaje del Álgebra Lineal, tanto en el Bachillerato como en niveles superiores del sistema educativo.

Referencias Bibliográficas

Aleksandrov, A. D., Kolmogorov, A. N., Laurentiev, M. A. y otros. (1973). *La matemática: su contenido, métodos y significado. Vol 3*. Madrid: Alianza.

Almeida, D. (1996). Justifying and proving in the Mathematics classroom. *Philosophy of Mathematics Education Newsletter* 9.

Alsina, C. y otros (1996). *Enseñar Matemáticas*. Barcelona: GRAÓ.

Anacona, M. (2003). Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA,* vol 8, nº 1, 30-46.

Anderson, J. R., Reder, L.M., Simon, H. A. (1996a) Situated Learning and education. *Educational Researcher.* Vol 25 nº 4

Anderson, J. R., Reder, L.M., Simon, H. A. (1996b) Situative versus Cognitive Perspectives: Form versus substance. *Educational Researcher.* Vol 26 nº 1

Anderson, J. R., Simon, H. A., Reder, L.M. (2000) Applications and misapplications of cognitive psychology to mathematical education. *Texas Educational Review*.

Antibi. (1999). La motivación en Matemáticas: ¿la del profesor? ¿la del alumno? J. A. E. M.

Arce Urdiales, R., Busto Caballero, A. I., Hernández Perdiguero, B. (2000). *Selectividad LOGSE. Pruebas de 1999. Matemáticas II.* Barcelona: Anaya.

Arce Urdiales, R., Busto Caballero, A. I., Hernández Perdiguero, B. (2003). *Selectividad LOGSE. Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. Pruebas de 2002.* Madrid: Anaya.

Argüelles Rodríguez, J. A. (1989). *Historia de la Matemática*. Madrid: Akal.

Arribas, A., Granados, P. (1995). *Pruebas de Selectividad. Matemáticas I.* Madrid: McGraw-Hill.

Arribas, A., Granados, P. (1993). *Pruebas de Selectividad. Matemáticas II.* Madrid: McGraw-Hill.

Arrieche Alvarado, M. J. (2002). *La Teoría de Conjuntos en la formación de maestros: facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Arrieche Alvarado, M. J., Godino, J. D. (2002). Conjuntos, números y maestros: Factores condicionantes del estudio de una teoría matemática. *XVIII Reunión del Semina-*

rio Interuniversitario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIIDM, Grupo DNDC-SEIEM). Castellón.

Ávila, A. (2001). El maestro y el contrato en la teoría Brousseniana. *Educación Matemática* 13 (3). Ed. Iberoamericana.

Balacheff, N (1988), Aspects of Proof in Pupils' Practice of School Mathematics, in Pimm, D (ed), *Mathematics, Teachers and Children*, Hodder and Stoughton. (216-235)

Balacheff, N. (1990). Towards a "problématique" for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education.* 21, (4), p. 259-272.

Batanero, C. (2002a). *El proceso de inferencia causal. Valoración de los resultados de la investigación.* Documento de trabajo del curso de doctorado "Deseño de investigacións educativas en ciencias e matemáticas". Departamento de Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales. Universidade de Santiago de Compostela.

Batanero, C. (2002b). *El proceso de investigación educativa. Etapas principales.* Documento de trabajo del curso de doctorado "Deseño de investigacións educativas en ciencias e matemáticas". Departamento de Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales. Universidade de Santiago de Compostela.

Batanero, C. (2002c). *Métodos Cualitativos en la Investigación en Educación*. Documento de trabajo del curso de doctorado "Deseño de investigacións educativas en ciencias e matemáticas". Departamento de Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales. Universidade de Santiago de Compostela.

Biosca Selga, A. y otros. (2001). *Matemáticas aplicadas ás Ciencias Sociais II*. Barcelona: Rodeira.

Biosca Selga, A. y otros. (2001). *Matemáticas II*. Barcelona: Rodeira.

Bobillo Ares, García Muñiz. (2000) *Matemáticas. Ciencias de la Naturaleza y la Salud.* Órbita.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20 (1). 7-40.

Boyer, C. B. (1996). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Brousseau, G (1986a) Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques. Tesis de Doctorado de Estado. Univeridad de Bordeaux I . Francia.

Brousseau, G. (1986b). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7(2): 33-115.

Busto Caballero, A. I., (2006a). *Selectividad LOGSE. Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. Pruebas de 2006.* Madrid: Anaya.

Busto Caballero, A. I., (2006b). *Selectividad LOGSE. Matemáticas II. Pruebas de 2006.* Madrid: Anaya.

Caballero, P. (1996). *Introducción a la Criptografía*. Madrid: Ra-Ma.

Carrillo de Albornoz Torres, A., Llamas Centeno, I. (2002). La calculadora en la prueba de acceso a la universidad. *Revista Epsilon*. nº 53: 319-332.

Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble : La Pensé Sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 12(1): 73-112

Chevallard, Y. (1999): L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19/2, 221-266.

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas: El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona: ICE/Horsori.

Cockcroft, W. H. y otros (1985). *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft.* Madrid: Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.

Colera, J., García, R., Oliveira, M. J. (2003). *Matemáticas II.* Madrid: Anaya.

Colera, J., Oliveira, M. J. (2009). *Matemáticas II*. Madrid: Anaya.

Colera, J., Oliveira, M. J., García, R. (2001a). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.* Madrid: Anaya.

Colera, J., Oliveira, M. J:, García, R. (2001b). *Matemáticas II.* Madrid: Anaya.

Collete, J.P. (1973) *Historia de las Matemáticas.* Madrid: Siglo XXI.

Confrey, J. (1995). A theory of intellectual development. *For the Learning of Mathematics*, 14, 3 (part I), 15, 1 (part II), 15, 2 (part III).

Corona García, T., Trigás Verdini, M. (2001). *Matemáticas. 2º de Bacharelato*. A Coruña: Baía Edicións.

Costa, C. y Catarino, P. (2007) Da colineariеlade no ensino secundária à dependência linear no ensino superior: Que descontinuidades. *Quadrante*, XVI, 1; 147-162.

D'Amore, B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *UNO*, 27, 51-76.

D'Amore, B., Font, V., Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. PARADIGMA. Vol XXVIII, nº 2: 49-77.

De Burgos, J. (1994). *Álgebra Lineal*. Madrid: McGraw Hill.

De Diego, B., Gordillo, E. (1979) *Problemas de oposiciones.* Deimos.

De Guzmán, M., Colera, J. (1995) *Selectividad. Matemáticas II*. Madrid: McGraw-Hill.

De la Villa, A. (1994). *Problemas de Álgebra.* CLAGSA.

De la Villa, A. (1998). Algunas "aplicaciones" del Álgebra. *Revista Epsilon* nº 41: 267-284.

De Olazábal, J. M. (1999). Sobre el concepto de determinante. *Revista Epsilon* nº 43-44: 35-46.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Revista Epsilon* nº 26: 15-30.

Diario Oficial de Galicia. nº 135. 15 de julio de 2002. Decreto 231/2002 del 6 de junio.

Diario Oficial de Galicia. nº 137. 17 de julio de 2002. Decreto 233/2002 del 6 de junio.

Diario Oficial de Galicia. nº 136. 13 de julio de 2007. Decreto 133/2007 del 5 de julio.

Diario Oficial de Galicia. nº 120. 23 de junio de 2008. Decreto 126/2008 del 19 de junio.

Dickinson, P., Eade, F. (2004) Using the number line to investigate the solving of linear equations. *For the Learning of Mathematics* 24,2. FLM Publishing Association, Kingston, Ontario, Canada.

Doneddu, A. (1978). *Curso de Matemáticas. Álgebra y Geometría*. Madrid: Aguilar.

Dorier, J (2000). The Role of Formalism in the Teaching of the Theory of Vector Spaces. En Dorier J (ed).*On the Teaching of Linear Algebra*. Kluwer Academic Publishers.

Dorier (2002), *Teaching Linear Algebra at University*, ICM 2003. vol III. 875 – 884

Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J., Rogalski, M. (1999). Teaching and Learning Linear Algebr in first year of French Sciencie University En I. Schwank (ED).*Actas del I European Research in Mathematics Education*, 103-112.

Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J., Rogalski, M. (2000). On a research programme concerning the teaching and learning of linear algebra in the first-year of a French science university. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31:1, 27-35.

Dorier, J. L., Sierpinska, A. (2001) Research into the teaching and learning of linear algebra. In Derek Holton (Ed.): *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: an ICMI Study.* 255-273

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, n. 2, pp. 5-31

Duval, R. (1995*). Semiosis et pensée humaine*. Paris: Peter Lang.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. Londres: The Falmer Press.

Ernest, P. (1994a). Variedades de constructivismo: sus metáforas, epistemologías e implicaciones pedagógicas. *Hiroshima Journal of Mathematics Education.* 2: 1-14.

Ernest, P. (1994b). What is social constructivism in the Psycology of Mathematics education. In Ponte, J. P. da, and Matos, J. F. *Eds Proceedings of the 18th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Lisbon, Portugal: University of Lisbon, 1994, Vol. 2, 304-311.

Ernest, P. (1997a). Mathematical activity and rhetoric: a semiotic analysis of an episode of mathematical activity. *Philosophy of Mathematics Education Journal* 10.

Ernest, P. (1997b). Texts and the objects of Mathematics. Extract from Chapter 6 of *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*, Albany, New York: SUNY Press.

Espinoza, L. (1998). *Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "Límite de función".* Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Faixes, A., Roda, J., Sans, J, (1984). *Matemáticas. Problemas de COU.* Barcelona: Promociones Publicaciones Universitarias.

Fauvel, J., Van Maanen, J. (1999). The role of the History of Mathematics in the teaching and learning of Mathematics. *Philosophy of Mathematics Education Journal* 11.

Fernández Gago, J. (2001). Una propuesta de problemas en las pruebas de acceso a la Universidad. *Revista Epsilon.* nº 51: 583-590.

Ferro Jove, P. (2004). *Dificultades na comprensión da Álgebra Lineal en estudiantes de Bacharelato.* Traballo de Investigación Tutelado. Programa de Doutoramento 2160-02-1. Departamento de Didáctica das Ciencias Experimentais e da Matemática. Universidade de Santiago de Compostela.

Filloy, E., Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from aritmética to algebra. *For the Learning of Mathematics* 9(2), 19-25.

Flores, P. (1998). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje.* Granada: COMARES.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria.* Tesis Doctoral. Universidade de Vigo.

Font, V. (2000). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en Didáctica de las Matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal*. 14: 1-35.

Font, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Revista EMA*. Vol 7, nº 2, 127-170.

Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralba (eds.): *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* pp. 109-128. Córdoba: Universidad de Córdoba.

Font, V., Godino, J. D., D'Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática.Versión ampliada del artículo: Font, V., Godino, J. D., D'Amore, B. (2007) An onto-semiotic approachto representations in mathematics education. *For the learning of mathematics*, 27(2): 2-7.

Font, V.; Ramos, A. B. (2005a) Contexto y contextualización en educación matemática. Una perspectiva ontosemiótica. *Actas del V Congreso Iberoamericano*. pp. 1-8 Associaçao de Profesores de Matemática de Portugal: Oporto.

Font, V.; Ramos, A. B. (2005b) Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales. *Revista de Educación*, 338, 309-346.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer, A. P.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Rescherches en didactique des Mathématiques,* 18/1, nº 52: 7-33.

Gil, M., Rodríguez F. (2001). *Matemáticas aplicadas ás Ciencias Sociais. 2º de Bacharelato. LOXSE*. Ourense: Grupo Academia Postal.

Godino, J. D. Comparación de herramientas teóricas en didáctica de las matemáticas. Documento de trabajo del curso de doctorado "Teoría de la educación Matemática". Recuperable en Internet en http://www.ugr.es/local/jgodino/ . Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, J. D. Hacia una teoría de la instrucción matemática significativa. Documento de trabajo del curso de doctorado "Teoría de la educación Matemática". Recuperable en Internet en http://www.ugr.es/local/jgodino/ . Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, J. D. Marcos teóricos de referencia sobre la cognición matemática. Documento de trabajo del curso de doctorado "Teoría de la educación Matemática". Recuperable en Internet en http://www.ugr.es/local/jgodino/ . Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, J. D. Problemas de investigación basados en el enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Documento de trabajo del curso de doctorado "Teoría de la educación Matemática". Recuperable en Internet en http://www.ugr.es/local/jgodino/ . Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, J. D. (1991). Hacia una teoría de la didáctica de la matemática. En A. Gutiérrez (Ed), *Área de conocimiento: Didáctica de la Matemática* (pp105-148). Madrid: Síntesis.

Godino, J. D. (1993a). Paradigmas, problemas y metodologías de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Quadrante*, 2 (1):9-22.

Godino, J. D. (1993b). La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática. *Quadrante*, 2 (2): 69-79.

Godino, J. D. (1999). Implicaciones metodológicas de un enfoque semiótico – antropológico para la investigación en didáctica de las matemáticas. En T. Ortega (ed.), Actas del *III Simposio de la SEIEM, (pp.).* Valladolid.

Godino, J. D. (2002a). Perspectiva ontosemiótica de la competencia y la comprensión matemática. XVI Convengo Nazionale: Incontri con la Matemática. Castel San Pietro Terme (Bologna).

Godino, J. D. (2002b). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2,3) : 237-284.

Godino, J. D. (2003a). Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica. Documento de trabajo del curso de doctorado "Teoría de la educación Matemática". Recuperable en Internet en http://www.ugr.es/local/jgodino/ . Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, J. D. (2003b). Teoría de las Funciones Semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. Trabajo de investigación presentado paara optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Godino, J. D., Batanero, C. (1994a). Enfoque exploratorio en el análisis multivariante de los datos educativos. *Epsilon*, nº 29: 11-22.

Godino, J. D., Batanero, C. (1994b). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14(3): 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. (1996). Relaciones dialécticas entre teoría, desarrollo y práctica en Educación Matemática: un meta-análisis de tres investigaciones. En N. Malara (Ed.), *An internacional View of Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* (pp. 13-22). Universidad de Módena.

Godino, J. D., Batanero, C. (1997) A Semiotic and Anthropological Approach to Research in Mathematics Education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*. 10.

Godino, J. D., Batanero, C. (1998a). El análisis del significado de los objetos matemáticos como área prioritaria de investigación en educación matemática. En: A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Ed.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P

Godino J. D., Batanero, C. (1998b). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *IX Seminario de Investigación en Educación Matemática. Sociedad Portuguesa de Investigación en Educación Matemática.*

Godino, J. D., Batanero, C., Flores, P. (1998). El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores de Matemáticas. En: A. Olovier y K. Newstead (eds.), *Proceedings of the 22nd Internacional Conference for the Psycologhy of Mathematics Education.* University of Stellenbosch, South Africa.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2003) *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Recuperable en Internet en http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2006) Un enfoque onto-semiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Recuperable en Internet en http://www.ugr.es/local/jgodino/ . Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, J. D., Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. (1995). Epistemology and mathematics instruction: Implications for curricular development. En L. Bazzini (Ed.), *Proceedins of the V Conference on Systematic Cooperation between Theory and Practice.* (pp.: 15-26). University of Pavia.

Godino J. D., Batanero, C., Roa, R. (2005). An onto-semiotic análisis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics,* 60: 3-36.

Godino, J. D., Bencomo, D, Font. V., Wilhemi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la *idoneidad didáctica* de procesos de estudios de las matemáticas. Versión ampliada de la ponencia invitada en el *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM), Huesca (España).

Godino, J. D., Contreras, A., Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 26 (1): 39-88.

Godino, J. D., Font, V. (2007). *Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos*. URL: http://www.ugr.es/ ~jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi (2006).Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME).* Número especial, 131-155.

Godino, J. D., Llinares, S. (2000) El interaccionismo simbólico en educación matemática. Revista *Educación Matemática.* Vol. 12, nº 1: 70-92.

Godino, J. D., Recio, A. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias.* 19 (3), 405-414.

Goetz, J. P., LeCompte, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa.* Madrid: Morata.

Golafshani. N. (2002). Teachers' Conceptions of Mathematics and their Instructional Practices. *Philosophy of Mathematics Education Journal* 15.

González, J.L. (1997). Clasificación de problemas aditivos por sus estructuras numérica y semática global. *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.*

González García, C., Llorente Medrano, J., Ruiz Jiménez, M. J. (2004). *Matemáticas 2.* Madrid: Editex.

González, M. T. Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*. 22 (3), 389-408.

González, F., Villanova, J. (1989) *Curso práctico de Matemáticas COU.* Barcelona: EDUNSA.

Gracia, J.M. (2002). Álgebra Lineal tras los buscadores de Internet. Recuperable en http: //www.math.uakron.edu/~dpstory/acrotex.html. Universidad del País Vasco. Departamento de Matemática Aplicada y Estadística.

Granados, P., Arribas, A. (1997). *Pruebas de Selectividad. Matemáticas II*. Madrid: McGraw-Hill.

Gueudet-Chartier, G. (2000) *Role du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire*. Thèse de doctorat. Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier. Grenoble.

Hall, R. D. G. (2002). An Análisis of Thought Processes during Simplification of an Algebraic Expression. *Philosophy of Mathematics Education Journal* 15.

Harel, G. (2000). Principles of Learning and Teaching Mathematics, With Particular Reference to the Learning and Teaching of Linear Algebra: Old and New Observations. En Dorier, J. (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*. Kluwer Academic Publishers.

Hillel, J. (2000). Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. In J-L Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* . Kluwer Academic Publishers.

Hillel, J y Sierpinska, A.(1994). On one persistent mistake in linear algebra. En J.P. da Ponte y J.F. Matos (eds). *Proceedings of the 18 th International Conference for the Psiychology of Mathematics Education*. Vol III, 65-72. Lisbon, Portugal.

Hjemslev, L. (1943). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje*. Madrid: Gredos, 1971.

Hurman, A. L. El papel de las aplicaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra Lineal. Recuperable en internet en www.cimm.ucr.ac.cr/.../**Algebra**%20Teaching/.../**Hurman**,%20A.%20El%20papel%20de%20las%20Aplicaciones%20en%20el%20...

Inglada, N., Font, V. (2003). Significados institucionales y personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental. *XIX Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SIIDM).* Boletín nº 15, pp. 1-18. Córdoba.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press.

Kü, D.; Trigueros, M. y Oktac, A (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial, desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, 20 (2), 65-89.

Kunz, K. S. (1957). *Numerical Analysis*. New Cork: Mc Graw-Hill Book Company.

Labraña, A., Plata, A., Peña, C., Crespo, E., Segura, R. (1995) *Álgebra Lineal. Resolución de sistemas lineales.* Madrid: Síntesis.

Lipschutz, S. (1998). *Álgebra Lineal.* Madrid: MacGraw Hill.

Luzárraga, A. (1970). *Problemas resueltos de Álgebra Lineal*. Barcelona: Luzárraga, A. (ed).

Maclane, S. (1981). Mathematical Models: A Sketch for the Philosophy of Mathematics. *The American Mathematical Monthly*. 88, 462-472.

Martín, J. F. (2001). Enseñanzas de modelos de pensamiento: metodología, metacognición y trnasferencias. *Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa.* Vol 7. Nº 22.

May, R.D.G. (2002). An análisis of thought processes during simplification of an algebraic expression. *Philosophy of Mathematics Education Journal* 15.

Mercado,A. I. (2003). La toma de apuntes y la resolución de problemas en educación secundaria. *Revista Epsilon.* nº 55: 63-72.

Miranda, E. (2004). *Generación de modelos de enseñanza – aprendizaje en el Álgebra Lineal. Primera Fase: Transformaciones Lineales*. Instituto Tecnológico y de Estudios superiores de Occidente (ITESO), México.

Noble, B., Daniel, J. W. (1989). *Álgebra Lineal Aplicada*. México: Prentice Hall Hispanoamérica.

Noriega, T., Núñez, R. (2001). La problematización del contenido y la producción de significados en Álgebra: primeras reflexiones. *Revista Epsilon*. nº 50: 237-248.

O'Connor, J.J., Robertson, E.F. (1996). Matrices and determinants. Recuperable en Internet en http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants.html

Ortega Pulido, P. (2002). *La Enseñanza del Álgebra Lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico.* Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

Panizza, M., Sadovsky, P., Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las ciencias.* 17(3): 453-461.

Pavlopoulou, K. (1993) Un problème décisive pour l´apprentissage de l'algèbre linéaire: La coordination des registres de représentation. *Annales de didactique et de Sciences cognitives*, n. 5, pp. 67-93.

Pérez, M (1994). La solución de problemas en Matemáticas. En Pozo V.I. (1994). *Solución de problemas.* Madrid: Santillana / Aula XXI.

Piaget, J., García, R. (1989). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Madrid: Siglo XXI.

Polya, G. (1945, ed.: 1971). *How to solve it. A New Aspect of Mathematical Method.* Princeton: Princeton University Press.

Prieto Sáez, E., Álvarez López, A. A., Arándiga Ráez, M. A. (2000) *Álgebra Lineal. Problemas resueltos y cuestiones comentadas.* Madrid: Centro de Estudiso Ramón Areces.

Puig, L. (1996) *Elementos de Resolución de Problemas*. Granada: Editorial Comares

Quesada Moreno, A. (2003). Criptografía y Matemáticas. División de secretos con uso de matrices. *Revista Epsilon*. nº 57: 407-418.

Ríos Valledepaz, J. (1998). El uso de la tecnología en la clase de Matemáticas. IV Congreso RIBIE, Brasilia.

Roa-Fuentes,S y Oktac, A (2010). Construcción de una descomposición genética. Análisis teórico del concepto de transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática (RELIME).* 13(1), 89-112.

Robert, A., Robinet, J., Tenaud, I.(1987*). De la géométrie à l'algébre linéaire*. Brouchure 72. I.R.E.M. Université Paris VII.

Rocha Silva Gusmao, T. C., (2006). *Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva ontosemiótica.* Tesis doctoral: Universidad de Santiago de Compostela.

Rodríguez Soalleiro, M. D. (1999). Cambios curriculares en la enseñanza del Álgebra: una propuesta metodológica haciendo uso de calculadoras gráficas. *Boletín de la Sociedad Puig Adam de profesores de Matemáticas.* nº 53.

Rojas Matas, A. (2003). Aplicaciones de una técnica de Álgebra Lineal en diversos campos de las ciencias de la computación. *Revista Epsilon.* nº 56: 215-222.

Ruiz Higueras, L. (1993). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Russell, S. J. (1997). The Role of Curriculum in Teacher Development. En Reflecting on Our Work: NSF Teacher Enhancement in K-6 Mathematics, editado por S. N. Friel & G. W. Bright, 247-254. Lanham, MD: University Press of America.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En: D. A. GROUWS (ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* Nueva York: McMillan Publishing Company.

Schoenfeld, A. H., (2000). Purposes and Methods of Research in Mathematics Education. *Notices of the AMS*. Volume 47. Number 6.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10(3), 24-36.

Sierpinska A**.** (1996) *Problems related to the design of the teaching and learning process in linear algebra.* Research Conference in Collegiate Mathematics Education, Central Michigan University.

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students' Thinking in Linear Algebra. En Dorier, J. (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* . Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A., Dreyfus, T. y Hillel, J.(1999). Evaluation of a Teaching Design in Linear Algebra: The Case of Linear Transformations. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19.1, 7-40.

Sierpinska, A. y Hillel, J. (1997) .Undergraduate linear algebra: Developing algebraic sense in students. *News of the Canadian Society for the Study of Education* 24.1, 23-25.

Socas, M. M., Hernández, J., Noda, A. (1997). Clasificación de PAEV aditivos de una etapa con cantidades discretas relativas. *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.*

Spiegel., M. R. (1993). *Análisis Vectorial*. México D. F.: McGraw Hill.

Strang, G. (1986). *Álgebra Lineal y sus aplicaciones.* EEUU: Addison-Wesley Iberoamérica.

Valoración xeral do nivel de coñecementos reflectidos nos exercicios das P.A.A.U. do curso 2005-2006. Matemáticas. Recuperable en Internet en: http://ciug.cesga.es/grupostraballo/21/valoracions_21.html

Valoración xeral do nivel de coñecementos reflectidos nos exercicios das P.A.A.U. do curso 2005-2006. Matemáticas Aplicadas ás Ciencias Sociais. Recuperable en Internet en: http://ciug.cesga.es/grupostraballo/61/valoracion_61.html

Valoración xeral do nivel de coñecementos reflectidos nos exercicios das P.A.A.U. do curso 2007-2008. Matemáticas. Recuperable en Internet en: http://ciug.cesga.es/grupostraballo/21/valoracions_21.html

Valoración xeral do nivel de coñecementos reflectidos nos exercicios das P.A.A.U. do curso 2007-2008. Matemáticas Aplicadas ás Ciencias Sociais. Recuperable en Internet en: http://ciug.cesga.es/grupostraballo/61/valoracion_61.html

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, Vol 10 nº 2, 3, pp. 133-170.

Vilanova, S., Rocerau, M. y otros. (2001) La Educación Matemática. El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación.*

Vizmanos, J. R., Anzola, M. (1989). *Matemáticas I.* Madrid: SM.

Vizmanos, J. R., Anzola, M. (2000). *Euler. 2º Bachillerato.* Madrid: SM.

Vygotski, L. S. (1934). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. 2ª edición. Barcelona. Crítica-Grijalbo, 1989.

Wilhelmi, M. R., Font, V., Godino, J. D. (2005). Bases empiriques de modèles théoriques en didactique des mathématiques: réflexions sur la théorie de situations didactiques et le point de vue ontologique et sémiotique. *Colloque International « Didactiques : quelles references epistemologiques ? »*

Wittgenstein, L (1953). *Investigaciones filosóficas.* Barcelona: Crítica.

ANEXOS

ANEXO 1

EXÁMENES REALIZADOS POR LOS ALUMNOS EN LOS CURSOS 2003-04, 2004-05 Y 2005-06.

EXAME 2º BACHARELATO (1)

1- Resolver AX+B = 2C: $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

2- Calcula: $\begin{vmatrix}2 & 3 & -2 & 4\\ 3 & -2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 3 & 4\\ -2 & 4 & 0 & 5\end{vmatrix}$

3- Sexan A=$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$. Sen calcular a matriz AB, decide canto vale $|AB|$

4- Sexa A =$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$. Sen calcular A^{-1} ni A^{T}, decide canto valen $|A^{-1}|$ e $\left|\left(A^{T}\right)^{-1}\right|$.

5- Discutir o sistema: $\begin{cases}x+2y+z=1\\ 2x+y+2z=2\\ 3x+3y+3z=3\end{cases}$

6- Resolver: $\begin{cases}x-y+3z=3\\ x+2y-z=2\\ 2x+y+2z=5\end{cases}$

7- Resolver: $\begin{cases}x+y-z=2\\ 2x+3y+5z=11\\ x-5y+6z=29\end{cases}$

8- Demostrar que no conxunto das matrices da forma $M=\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, o producto é conmutativo.

9- Dadas as matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1 & 1\\ -4 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ decir cales das seguintes matrices se poden calcular: A+B, A-B, AB, BA, AA, BB.

10- ¿Que condición deben cumprir dúas matrices calesquera A e B para que se poda efectuar a súa suma? ¿É ésta conmutativa?

11- Producto de matrices. Condicións para a súa realización. ¿É posíbel que para dúas matrices A e B non cadradas existan AB e BA?

EXAMEN 2º BACHILLERATO LETRAS (2)

1- Halla la matriz inversa de A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2- Resolver por Gauss: $\begin{cases} x - y = -1 \\ -2x + 2y = 2 \end{cases}$

3- Dibuja la región del plano determinada por las inecuaciones:
$x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6, 2x + y \leq 10, x + y \geq 3$
y maximiza la función z = 4x+3y sometida a las restricciones dadas por estas inecuaciones.

4- $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{x + 2}$

5- Halla la tasa de variación media de la función f(x) = $\dfrac{x}{x+1}$ en los intervalos [0,1], [0,2], [1,2].

6- La temperatura (en grados centígrados) de un trozo de metal sumergido en una solución durante 9 horas viene dada por: T(t) = 10+$\dfrac{20}{1+t} - 5t, 0 \leq t \leq 9$. Se pide:
a) Temperatura inicial del metal.
b) La temperatura, ¿aumenta o disminuye con el paso del tiempo?
c) ¿Durante cuánto tiempo la temperatura del metal supera los 0º?

7- Una bolsa contiene bolas numeradas del 1 al 8. Se realiza un experimento que consiste en extraer una bola de la bolsa y anotar su número. Consideremos los siguientes sucesos: A = “salir par”, B = “salir impar”, C = “salir múltiplo de 4”. Calcular las probabilidades de AUB, AUC y BUC.

8- En una ciudad se publican tres periódicos A, B y C. Tras un estudio realizado por una empresa, se sabe que el 30% de la población lee A, el 20% lee B y el 15% lee C. Además, sabemos que el 12% lee A y B, el 9% lee A y C y el 6% lee B y C. Finalmente el 3% lee A, B y C. A la vista de estos datos se pide:
a) Porcentaje de personas que leen al menos uno de los tres periódicos.
b) Porcentaje de personas que lee sólo A.
c) Porcentaje de personas que lee B o C, pero no A.
d) Porcentaje de personas que lee A o bien no leen B ni C.

9- En una distribución N(20,6), tomamos muestras de tamaño 64.
a) ¿Cuál es la distribución de la media de muestras?
b) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una muestra con una media comprendida entre 19 y 21?

10- Un ganadero de reses bravas quiere estimar el peso medio de los toros de su ganadería con un nivel de confianza del 95%. Para ello, toma una muestra de 30 toros y los pesa. Obtiene una media de 507 kg y una desviación típica de 32 kg. ¿Cuál es el intervalo de confianza para la media de la población?

EXAMEN 2º BACHILLERATO LETRAS (3)

1- Halla la matriz inversa de A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2- Hallar la matriz X tal que AX = B+2C, siendo

A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

3- Calcular A^2-A-2I, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4- Sean A,B,C matrices cuadradas de orden n. Si AB = AC, ¿se puede concluir B = C?

5- Los hijos de Juan han ido el lunes a comprar un bocadillo de jamón, un pastelito y un refresco, pagando por todo 2'7 euros. El martes han comprado dos bocadillos, dos pastelitos y tres refrescos, pagando por todo 5'85 euros. El miércoles, Juan encarga a sus hijos cuatro bocadillos de jamón, cuatro pastelitos y cinco refrescos y, tras interrogar a sus hijos sobre los precios, ellos aseguran desconocerlos, pero sí recuerdan lo pagado y cuáles eran los encargos del lunes y del martes. Sabiendo que el tendero es serio y no ha variado los precios, Juan ha calculado la cantidad exacta que debe dar a sus hijos por el encargo del miércoles. ¿Sabrías decir cuál es esa cantidad? ¿Se puede deducir el precio de cada cosa?

6- Los sueldos del padre, la madre y un hijo sumados dan 1950 euros. La madre gana el doble del hijo. El padre gana $\frac{2}{3}$ de lo que gana la madre. ¿Cuánto gana cada uno?

7- Resolver: $\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 2z = 1 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$

EXAMEN 2º BACHILLERATO LETRAS (4)

1- Halla la matriz inversa de A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2- Hallar la matriz X tal que AX = B, siendo: A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3- Una matriz cuadrada M es ortogonal si cumple $M^T M = I$. Demostrar si la matriz siguiente es ortogonal: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4- Discutir el sistema: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \\ x + 5y - z = -5 \end{cases}$

5- Se dispone d eun recipiente de 24 litros de capacidad y de tres medidas A, B y C. Se sabe que el volumen de A es el doble que el de B, que las tres medidas llenan el depósito y que las dos primeras lo llenan hasta la mitad. ¿Qué capacidad tiene cada medida?

6- Resolver el sistema: $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$

7- Dada la región del plano definida por las siguientes inecuaciones: $\begin{cases} x + y - 1 \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$.

¿Para qué valores (x,y) de la región es máxima la función z = 5x+2y? ¿Para cuáles es mínimo?

8- Un empresa constructora dispone de dos tipos de camiones A y B y quiere transportar 100 toneladas de material al lugar de una obra. Sabiendo que dispone de 6 camiones del tipo A con una capacidad de 15 toneladas y con un coste de 24 euros por viaje y de 10 camiones de tipo B con una capacidad de 5 toneladas y con un coste de 18 euros por viaje, se pide:
a) El número posible de camiones de cada tipo que se puede usar.
b) El número de camiones de cada tipo que debe usar para que el coste sea mínimo y el valor de dicho coste.[8]

[8] El resto del examen abarca contenidos que no tienen que ver con el Álgebra Lineal y que por tanto omitimos.

EXAMEN 2º BACHILLERATO (5)

1- Sea A+B = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, A-B = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular A^2-B^2.

2- Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, halla una matriz X tal que AX+B = 0.

3- Si A = (a_{ij}) = 2i-j y B = (b_{ij}) = $|i-j|$ y ambas pertenecen a $M_{3\times3}$, se pide:

a) Escribe las matrices A y B.
b) ¿Son simétricas?
c) Escribir A^T y B^T.

4- Una fábrica produce tornillos de longitudes 1, 3, 7cm y tienen 4 clientes: Andrés, Juan, Lucas y Pedro. Durante el mes de enero vendió a Andrés 9 cajas de tornillos de 1cm, 5 cajas de 3cm y 2 cajas de 7cm; a Juan 3 cajas de 1cm y 8 cajas de 3cm, a Lucas no se le vendió nada y a Pedro, 6 cajas de 1cm, 7 cajas de 3cm y 1 caja de 7cm. Durante el mes de febrero las ventas fueron: a Andrés 5, 2 y 3 cajas de tornillos de 1, 3 y 7cm respectivamente; a Juan 6 cajas de cada tipo; a Lucas sólo 4 cajas de 1cm y Pedro este mes no compró ninguna.
a) Construye las matrices que expresan las ventas en los meses de enero y febrero.
b) Ayudándote de las matrices anteriores calcula la matriz de ventas conjuntas de enero y febrero.
c) Escribe la matriz que refleje la variación de las ventas de febrero en relación con las de enero.

5- Calcula: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

6- Sean A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Sin calcular la matriz AB, decide cuanto vale $|AB|$.

7- Sea A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Sin calcular A^{-1} ni A^T, decide cuanto valen $|A^{-1}|$ e $|(A^T)^{-1}|$.

8- Si A es 5×5 y detA = -1, cuanto vale det(2A)?

9- Halla la matriz adjunta de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EXAMEN 2º BACHILLERATO (6)

1- Si A = $(a_{ij}) = 2i\text{-}j$ y B = $(b_{ij}) = |i-j|$ y ambas pertenecen a $M_{3\times 3}$, se pide:
a) Escribe las matrices A y B.
b) ¿Son simétricas?
c) Escribir A^T y B^T.

2- Una fábrica produce tornillos de longitudes 1, 3, 7cm y tienen 4 clientes: Andrés, Juan, Lucas y Pedro. Durante el mes de enero vendió a Andrés 9 cajas de tornillos de 1cm, 5 cajas de 3cm y 2 cajas de 7cm; a Juan 3 cajas de 1cm y 8 cajas de 3cm, a Lucas no se le vendió nada y a Pedro, 6 cajas de 1cm, 7 cajas de 3cm y 1 caja de 7cm. Durante el mes de febrero las ventas fueron: a Andrés 5, 2 y 3 cajas de tornillos de 1, 3 y 7cm respectivamente; a Juan 6 cajas de cada tipo; a Lucas sólo 4 cajas de 1cm y Pedro este mes no compró ninguna.
a) Construye las matrices que expresan las ventas en los meses de enero y febrero.
b) Ayudándote de las matrices anteriores calcula la matriz de ventas conjuntas de enero y febrero.
c) Escribe la matriz que refleje la variación de las ventas de febrero en relación con las de enero.

3- Calcula: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

4- Sean A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Sin calcular la matriz AB, decide cuanto vale $|AB|$.

5- Calcula la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

6- Hallar un número de 3 cifras, sabiendo que suman 9, que si del número dado se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198, y que, además, la cifra de las decenas es media aritmética de las otras dos.

7- Dos hermanos charlando concluyen que entre ambos tienen 29 años, y el uno le dice al otro: “dentro de 8 años mi edad será el doble de la tuya”. ¿Cuántos años tiene cada uno en la actualidad?

8- Discute el sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - 4z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \end{cases}$ ([9])

[9] El resto del examen abarca contenidos que no tienen que ver con el Álgebra Lineal y que por tanto omitimos.

EXAMEN 2º BACHILLERATO (7)

1- Si A = $(a_{ij}) = 2i\text{-}j$ y B = $(b_{ij}) = |i-j|$ y ambas pertenecen a $M_{3\times 3}$, se pide:

a) Escribe las matrices A y B.
b) ¿Son simétricas?
c) Escribir A^T y B^T.

2- Una fábrica produce tornillos de longitudes 1, 3, 7cm y tienen 4 clientes: Andrés, Juan, Lucas y Pedro. Durante el mes de enero vendió a Andrés 9 cajas de tornillos de 1cm, 5 cajas de 3cm y 2 cajas de 7cm; a Juan 3 cajas de 1cm y 8 cajas de 3cm, a Lucas no se le vendió nada y a Pedro, 6 cajas de 1cm, 7 cajas de 3cm y 1 caja de 7cm. Durante el mes de febrero las ventas fueron: a Andrés 5, 2 y 3 cajas de tornillos de 1, 3 y 7cm respectivamente; a Juan 6 cajas de cada tipo; a Lucas sólo 4 cajas de 1cm y Pedro este mes no compró ninguna.
a) Construye las matrices que expresan las ventas en los meses de enero y febrero.
b) Ayudándote de las matrices anteriores calcula la matriz de ventas conjuntas de enero y febrero.
c) Escribe la matriz que refleje la variación de las ventas de febrero en relación con las de enero.

3- Una matriz cuadrada M es ortogonal si cumple $M^TM = I$. Demostrar si la matriz siguiente es ortogonal: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4- Calcula: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

5- Sean A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Sin calcular la matriz AB, decide cuanto vale $|AB|$.

6- Halla la matriz adjunta de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7- Dos hermanos charlando concluyen que entre ambos tienen 29 años, y el uno le dice al otro: “dentro de 8 años mi edad será el doble de la tuya”. ¿Cuántos años tiene cada uno en la actualidad?

8- Resuelve el sistema: $\begin{cases} x+2z=1 \\ y+2z=1 \\ x+2y=-2 \end{cases}$

9- Discute el sistema $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-4z=0 \\ 3x-y-2z=0 \end{cases}$ ([10])

[10] El resto del examen abarca contenidos que no tienen que ver con el Álgebra Lineal y que por tanto omitimos.

EXAMEN 2º BACHILLERATO CIENCIAS (8)

1- Dada la matriz $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, hallar X^2 y X^3.

2- Demostrar que en el conjunto de las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, el producto es conmutativo.

3- Dada a matriz M = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & m \\ m & 2 & -1 \end{pmatrix}$ onde m é un parámetro real, pídese:

a) Determinar o rango de M segundo os distintos valores de m.
b) Calcular o determinante de M se m = 3. Xustificar se esta matriz ten inversa.
c) Dar un valor de m para que M sexa singular.

4- Resolver según los valores de a: $\begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3y + z = 3 \\ x + 2y + 5z = a \end{cases}$ ([11])

[11] El resto del examen abarca contenidos que no tienen que ver con el Álgebra Lineal y que por tanto omitimos.

EXAMEN 2º BACHILLERATO CIENCIAS (9)

1- ¿Existe una matriz B tal que el producto AB sea una matriz de 3 filas, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$?

2- Resolver AX+B = 2C. A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3- Los sueldos del padre, la madre y un hijo sumados dan 1950 euros. La madre gana el doble del hijo. El padre gana $\frac{2}{3}$ de lo que gana la madre. ¿Cuánto gana cada uno? ([12])

[12] El resto del examen abarca contenidos que no tienen que ver con el Álgebra Lineal y que por tanto omitimos.

EXAMEN BACHILLERATO CIENCIAS (10)

1- Dada la matriz $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, hallar X^2 y X^3.

2- Calcular $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

3- Demostrar que en el conjunto de las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, el producto es conmutativo.

4- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ decir cuáles de las siguientes matrices se pueden calcular: A+B, A-B, AB, BA, AA, BB.

5- Dada a matriz M = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & m \\ m & 2 & -1 \end{pmatrix}$ onde m é un parámetro real, pídese:

a) Determinar o rango de M segundo os distintos valores de m.
b) Calcular o determinante de M se m = 3. Xustificar se esta matriz ten inversa.
c) Dar un valor de m para que M sexa singular.

6- Si A es la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ calcular la matriz $B = (A^T A^{-1})^2$. Hallar el determinante de la matriz $(A^T A^{-1})^{276}$

7- Calcular:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

8- Resolver: $\begin{cases} 5x + 2y + 3x = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x + 2y + 2z = -3 \end{cases}$

9- Resolver: $\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ x + y - 2z = -5 \\ 2x + y + 3z = 16 \end{cases}$

10- Discutir el sistema: $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$

EXAMEN 2º BACHILLERATO CIENCIAS (11)

1- Dada la matriz $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, hallar X^2 y X^3.

2- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ decir cuáles de las siguientes matrices se pueden calcular: A+B, A-B, AB, BA, AA, BB.

3- ¿Qué condición deben cumplir dos matrices cualesquiera A y B para que pueda efectuarse su suma? ¿Es ésta conmutativa?

4- Dada a matriz M = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & m \\ m & 2 & -1 \end{pmatrix}$ onde m é un parámetro real, pídese:

a) Determinar o rango de M segundo os distintos valores de m.
b) Calcular o determinante de M se m = 3. Xustificar se esta matriz ten inversa.
c) Dar un valor de m para que M sexa singular.

5- Discutir: $\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ 3x + y - 5 = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$

6- Resolver por Cramer: $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$ ([13])

[13] El resto del examen abarca contenidos que no tienen que ver con el Álgebra Lineal y que por tanto omitimos.

EXAMEN 2º BACHILLERATO CIENCIAS (12)

1- Dada una matriz A, ¿existe una matriz B tal que el producto AB o BA sea una matriz de una sola fila? Aplicar la conclusión obtenida a la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

2- Sean A,B,C matrices cuadradas de orden n. Si AB = AC, ¿se puede concluir B = C?

3- Sea A+B = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, A-B = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular A^2-B^2.

4- Calcular el determinante $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

5- Sean A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. SIn calcular La matriz AB, decide cuánto vale $|AB|$.

6- Halla la matriz adjunta de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7- Dos hermanos charlando concluyen que entre ambos tienen 29 años, y el uno le dice al otro: "dentro de 8 años mi edad será el doble de la tuya". ¿Cuántos años tiene cada uno en la actualidad?

8- Resuelve el sistema: $\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 2z = 1 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$

9- Discute el sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - 4z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \end{cases}$ ([14])

[14] El resto del examen abarca contenidos que no tienen que ver con el Álgebra Lineal y que por tanto omitimos.

EXAMEN 2º BACHILLERATO CIENCIAS (13)

1- Dada una matriz A, ¿existe una matriz B tal que el producto AB o BA sea una matriz de una sola fila? Aplicar la conclusión obtenida a la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

2- Sea A+B = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, A-B = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular A^2-B^2.

3- Calcular el determinante $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

4- Sean A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Sin calcular la matriz AB, decide cuánto vale $|AB|$.

5- Halla la matriz adjunta de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6- Calcular tres números que cumplan las condiciones siguientes:

a) El primero es la suma de los otros dos.

b) El segundo es igual a la mitad del primero más el doble del tercero.

c) La suma de todos es 6.

7- Dos hermanos charlando concluyen que entre ambos tienen 29 años, y el uno le dice al otro: “dentro de 8 años mi edad será el doble de la tuya”. ¿Cuántos años tiene cada uno en la actualidad?

9- Discute el sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - 4z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \end{cases}$ ([15])

[15] El resto del examen abarca contenidos que no tienen que ver con el Álgebra Lineal y que por tanto omitimos.

EXAMEN 2º BACHILLERATO CIENCIAS (14)

1- Sea A una matriz de orden 3, demostrar que $A\cdot A^T$ y $A^T\cdot A$ son simétricas.

2- Demostrar que en el conjunto de las matrices de la forma $M=\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, el producto es conmutativo.

3- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&2\\1&0&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4&1&1&1\\-4&2&0&0\\1&2&1&1\end{pmatrix}$ decir cuáles de las siguientes matrices se pueden calcular: A+B, A-B, AB, BA, AA, BB.

4- ¿Qué condición deben cumplir dos matrices cualesquiera A y B para que pueda efectuarse su suma? ¿Es ésta conmutativa?

5- Producto de matrices. Condiciones para su realización. ¿Es posible que para dos matrices A y B no cuadradas existan AB y BA?

6- Hallar la matriz X tal que AX = B+2C, siendo
$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\9&3&-3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&0\\3&4&5\end{pmatrix}$

7- Calcular el determinante $\begin{vmatrix}2&3&-2&4\\3&-2&1&2\\3&2&3&4\\-2&4&0&5\end{vmatrix}$

8- Sean A = $\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&2&1\\1&0&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&2&3\\1&1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$. Sin calcular la matriz AB, decide cuánto vale $|AB|$.

9- Sea A = $\begin{pmatrix}3&1\\3&2\end{pmatrix}$. Sin calcular A^{-1} ni A^T, decide cuánto valen $|A^{-1}|$ e $\left|(A^T)^{-1}\right|$.

EXAMEN 2º BACHILLERATO (15)

1- Demostrar que en el conjunto de las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, el producto es conmutativo.

2- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ decir cuáles de las siguientes matrices se pueden calcular: A+B, A-B, AB, BA, AA, BB.

3- ¿Qué condición deben cumplir dos matrices cualesquiera A y B para que pueda efectuarse su suma? ¿Es ésta conmutativa?

4- Resolver la ecuación matricial AX-B = C, siendo
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

5- Calcular el determinante $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ ([16])

[16] El resto del examen abarca contenidos que no tienen que ver con el Álgebra Lineal y que por tanto omitimos.

EXAMEN 2º BACHILLERATO (16)

1- ¿Existe una matriz B tal que el producto AB sea una matriz de 3 filas, siendo
$A=\begin{pmatrix}1&3&2&1\\4&5&3&-2\end{pmatrix}$?

2- Sean A,B,C matrices cuadradas de orden n. Si AB = AC, ¿se puede concluir B = C?

3- Resolver la ecuación matricial AX-B = C, siendo
$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\end{pmatrix}$

4- Calcular el determinante $\begin{vmatrix}2&3&-2&4\\3&-2&1&2\\3&2&3&4\\-2&4&0&5\end{vmatrix}$

7- Resolver: $\begin{cases}x+y+z+t=6\\2x-y+3z-t=9\\3x+2y+z+2t=10\\x-2y-4z+t=-15\end{cases}$

8- Resolver: $\begin{cases}x+y+z=1\\2x-y+z=0\\3x-3y+z=0\end{cases}$ ([17])

---

[17] El resto del examen abarca contenidos que no tienen que ver con el Álgebra Lineal y que por tanto omitimos.

ANEXO 2

DISTRIBUCIÓN DE LOS ÍTEMS POR GRUPOS

Ítems pertenecientes al grupo1: 1 (examen 1), 2 (examen 3), 1,2 (examen 5), 2 (examen 9), 3 (examen 12), 2 (examen 13), 6 (examen 14), 8 (examen 15), 3 (examen 16)

Ítems pertencientes al grupo 2: 8 (examen 1), 4 (examen 3), 3 (examen 4), 3 (examen 5), 1 (examen 6), 1,3 (examen 7), 2 (examen 8), 1 (examen 9), 3 (examen 10), 1,2 (examen 12), 1 (examen 13), 1,2 (examen 14), 1 (examen 15), 1,2 (examen 16)

Ítems pertenecientes al grupo 3: 4 (examen 5), 2 (examen 6), 2 (examen 7)

Ítems pertenecientes al grupo 4: 5,6,7,9 (examen 1), 1,2 (examen 2), 1,3,7 (examen 3), 1,2,4,6 (examen 4), 9 (examen 5), 5,8 (examen 6), 6,8,9 (examen 7), 1,3,4 (examen 8), 1,2,4,5,6,7,8,9,10 (examen 10), 1,2,4,5,6 (examen 11), 6,8,9 (examen 12), 5,8 (examen 13), 3 (examen 14), 2,8,9 (examen 15), 7,8 (examen 16)

Ítems pertenecientes al grupo 5: 2,3,4 (examen 1), 5,6,7,8 (examen 5), 3,4 (examen 6), 4,5 (examen 7), 4,5 (examen 12), 3,4 (examen 13), 7,8,9 (examen 14), 5 (examen 15), 4 (examen 16)

Ítems pertenecientes al grupo 6: 5,6 (examen 3), 5 (examen 4), 6,7 (examen 6), 7 (examen 7), 3 (examen 9), 7 (examen 12), 6,7 (examen 13)

Ítems pertenecientes al grupo 7: 10,11 (examen 1), 3 (examen 11), 4,5 (examen 14), 3 (examen 15)

ANEXO 3

TRANSCRIPCIÓN DE LA ENTREVISTA

E: ¿En qué nivel de vuestros estudios os habían enseñado Álgebra?

M: Matrices y determinantes este año.

E: ¿Y no sabéis de nada más que sea Álgebra? ¿Qué es el Álgebra para vosotras?

M, S: Ni idea.

E: Todo lo de ecuaciones, toda esa parte de polinomios, ¿nunca os dijeron que eso era Álgebra?

M , S: Ah, sí…Álgebra, Álgebra, no.

E: Pero disteis ecuaciones y polinomios.

M, S: Eso sí.

E: ¿En qué curso empezasteis?

S: Yo creo que ya en primaria.

E: ¿Primaria?

M: Sí, después ecuaciones y polinomios en primero.

E: ¿Os acordáis más o menos qué os enseñaron?

S: Ecuaciones, después de 2º grado, despejar la x y esas cosas y luego en 3º sistemas, un poco más complicados.

E: ¿Las ecuaciones más o menos en primaria?

M: Yo creo que sí.

E: ¿Y los sistemas?

M: También.

S: Al principio más sencillos, pero en 2º y en 3º ya empezamos así con más…

E: ¿Y cómo resolvíais los sistemas? ¿Qué os enseñaron para resolver sistemas?

M: Sustitución, reducción e igualación.

E: ¿Cuál utilizabais más?

S: Reducción.

M: Sustitución.

E: ¿Sustitución?

M: Cualquiera menos reducción.

E: ¿Reducción es el que no usabas nunca?

S: Yo sí.

E: ¿Qué sistemas dabais? ¿Cuántas ecuaciones? ¿Cuántas incógnitas? ¿Cómo eran?

M: Primero dos y después tres.

E: ¿Pero mismo número de ecuaciones que de incógnitas: dos por dos, tres por tres?

M, S: Sí.

E: ¿Nunca había tres ecuaciones con dos incógnitas o dos ecuaciones con tres incógnitas?

M, S: No.

E: ¿En algún momento os hablaron de cómo resolver sistemas más grandes: tres ecuaciones con tres incógnitas?

M: No.

S: Tres ecuaciones con tres incógnitas sí.

M: Se despejaba una incógnita.

S: Este año. Ya tienes las matrices para resolverlos.
E: ¿Antes de este año no habíais hecho ninguno?
M: Yo creo que sí, que dejábamos siempre la misma incógnita a un lado. La solución dependiendo de…, con un cambio de variable.
E: Entonces en principio habíais hecho sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas y nunca os dijeron que ibais a estudiar sistemas más grandes: cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, distinto número de ecuaciones que de incógnitas.
M: Supongo que sí que nos lo dijeron.
S: Siempre te dicen que después viene algo más difícil pero…no sé.
E: Vamos a algo un poco más personal, sobre vuestros exámenes. ¿Cuánto tiempo más o menos dedicasteis al estudio de matrices y determinantes antes del examen?
S: ¿De Selectivo?
E: No, del examen de clase, de la primera evaluación.
M, S: No un tiempo fijo. Durante el trimestre también practicábamos desde que empezamos a dar el tema. De vez en cuando vas haciendo cosas.
E: ¿No lo dejasteis para el final, fuisteis estudiando?
M: El día anterior tienes que mirar todo junto otra vez.
S: Dos días antes es cuando empiezas de verdad a mirar desde el principio.
E: ¿Cómo lo estudiasteis? ¿Os dedicasteis a hacer sólo ejercicios?
M, S: Ejercicios, los de clase otra vez y las propiedades por si acaso.
E: ¿A qué le dedicasteis más tiempo?
M, S: A los ejercicios.
E: ¿Creéis que el tiempo dedicado en clase fue suficiente para haber entendido todo? Lo que le dedicamos en clase a matrices y determinantes para asimilar las propiedades, las definiciones, ¿creéis que llegó el tiempo?
M, S: Yo creo que sí.
E: ¿Y para poder hacer bien el examen?
M, S: Sí.
E: Las notas que tenéis en el primer examen son 7'5 y 6'75. ¿Más o menos concuerda con el tiempo que habíais estudiado o veis poca nota?
M: Yo preparé este examen a última hora.
S: Lo preparé pero quedé insatisfecha y fui a la recuperación a subir nota.
E: ¿En clase creéis que se desarrollaban muchas cosas o que dábamos todo de manera escueta y con ejercicios? ¿Cómo creéis que se plantearon las clases?
M: Para preparar el examen, bien.
E: ¿Creéis que en algunas cosas teníamos que haber profundizado más?
M: No sé si había que llegar a más nivel del que llegamos, pero con lo que dimos está bien desarrollado todo.
E: ¿No tuvisteis problemas en Selectividad con lo que se dio para afrontar los problemas?
M, S: No.

E: ¿Creéis que lo que se dio de Álgebra Lineal es útil en Bachillerato?
M: Igual que otros temas; de momento no sé para qué sirven.
S: Útil sí será, si se da.
E: Por vosotras, ¿seguiría en el temario?
M, S: Sí.
E: ¿Pero sí porque se saca buena nota con él o sí porque realmente tiene utilidad?
(risas)
M: Sí, yo creo que es útil.
S: Fuera del Álgebra también se puede utilizar.
E: ¿Para lo que vais a estudiar ahora os va a valer?
M: Aún no lo sé muy bien pero supongo que sí.
E: ¿Tenéis matemáticas en la carrera las dos?
M, S: Sí.
E: ¿Creéis que vais a tocar algo de esto?
S: Yo creo que sí.
M: Creo que más trigonometría y cosas así, pero esto también.
E: ¿Creéis que cuando acabéis la carrera vais a necesitar algo de esto?
M: No lo creo.
S: Supongo que sí que se aplicará para algunas cosas pero no lo sé, la verdad.
E: ¿Durante el resto del curso habéis visto aplicación de matrices y determinantes?
M, S: Sí, para resolver sistemas.
E: ¿Y para algo más?
M: Para geometría, producto vectorial y mixto son determinantes también.
E: Supongo que os acordáis porque habéis hecho ayer Selectividad. ¿Os acordáis qué es una matriz? ¿Podríais explicar qué es una matriz?
S: La forma de poner una tabla.
E: Si se lo explicarais a los que ahora están en primero, ¿qué les diríais?
S: La verdad no sé.
E: ¿Qué operaciones podéis hacer con matrices?
M: Sumar, restar, multiplicar y…división no.
E: Los elementos que tiene una matriz, ¿qué número son?
S: Naturales.
M: Reales.
E: ¿Fracciones?
M, S: Sí, también.
E: ¿Complejos?
S: No los pusimos, no sé si se puede.
E: ¿Qué diferencia hay entre una matriz y un determinante?
M: No sé, cada matriz tiene su correspondiente determinante. De un determinante puedes hallar un solo valor que equivalga a todo.

E: Si tenéis matrices distintas, ¿podéis tener distintos valores de los determinantes?

M, S: Sí.

E: ¿Podemos tener un determinante de todas las matrices?

M: Sí.

S: A veces no se utilizan todos los elementos de una matriz.

E: De una matriz 4 × 3, ¿podemos hacer un determinante?

M: Sí, dos.

S: No, no se puede. Se puede coger un determinante 3×3.

M: Bueno, de la matriz entera no se puede pero se pueden coger dos determinantes.

E: Las propiedades de los determinantes supongo que las aprendisteis para ayer. ¿Las entendéis o las memorizasteis?

M, S: Más o menos se entienden, cómo aplicarlas.

E: Cómo aplicarlas, pero qué significan las propiedades, si tienen algún sentido matemático, si las relacionáis con otra cosa.

M, S: Son reglas de cálculo.

E: ¿Para qué las usáis?

M, S: Para resolver un determinante más grande.

E: ¿Qué tipo de matrices conocéis?

S: Cuadradas, rectangulares, triangulares, escalares, identidad, simétricas, antisimétricas, traspuestas.

E: ¿Para qué sirven?

M: La identidad sirve para…como no puedes dividir matrices…

S: No, la identidad no, la inversa.

E: ¿Y las demás?

M, S: No sé.

E: ¿Creéis que hay algún aspecto del tema que hay que enfatizar más?

M, S: No.

E: ¿Sabéis calcular ecuaciones con matrices?

M, S: Sí.

E: ¿Para qué sirven?

M: Para hallar el valor de la incógnita.

E: Pero en sentido práctico, ¿para qué?

M: Resolver problemas.

E: ¿Por ejemplo?

M: Resolución de sistemas.

E: No me refiero a eso. Me refiero a las ecuaciones matriciales.

M: No les vimos aplicación.

E: ¿Sabéis resolverlas pero no sabéis para qué sirven?

M, S: No.

E: ¿Se pueden resolver siempre?

M: Tienen que tener unas dimensiones determinadas.

E: ¿Qué diferencia hay entre una comprobación y una demostración?
M, S: No sé.
M: Demostrar es explicar porqué se puede aplicar una propiedad y comprobar verificar que funciona. Creo que es más o menos lo mismo.
E: ¿Recordáis alguna demostración?
S: Producto de una matriz.
M: Con determinantes.
E: ¿Producto de una matriz con determinantes?
M: ¿Con qué temas: matrices o determinantes?
E: Con cualquiera de los dos.
S: La n-ésima potencia. Hay que demostrar cuál era y con la demostración vemos si es verdad lo que descubrimos en el ejercicio.
M: La comprobación más o menos debe ser lo mismo.
E: ¿Para qué sirve la potencia n-ésima?
M, S: No sé.
E: Os doy los tres exámenes que hicisteis: el primero es el primer examen de la primera evaluación, el segundo es el de evaluación y el 3º es la recuperación. Echarles un vistazo. Sandra, en el primer examen, el problema 4, que es aplicación práctica, no lo haces y en el siguiente examen lo haces perfecto.
S: En el primer examen lo dejé para el final y no vi cómo hacerlo. Luego me di cuenta.
E: En el segundo examen, ¿lo haces tú sola o alguien te lo había explicado y lo soltaste de memoria?
S: Luego lo entendí pero en el primer examen vi que era un problema y lo dejé para el final.
E: ¿Por qué les tenéis miedo a los problemas? ¿Por qué cada vez que hay un enunciado largo no se intenta?
S: Como es largo ya lleva tiempo leerlo, entenderlo, asimilarlo.
E: ¿Hicimos muchos problemas en clase?
S: Igual que este no. Algunos sí, pero no muchos.
E: Pero con lo que se sabía de clase, ¿se podía abordar bien el problema?
S: Era más difícil plantearlo que resolverlo. Lo difícil era saber lo que te pedía. Cuando sabías lo que había que hacer era muy fácil.
E: Al acabar el examen todos comentáis. Han pasado muchos meses pero, ¿os acordáis más o menos cuál fue el comentario del problema?
M: Hubo de todo. La gente salió diciendo que no se podía hacer y cuando se vio cómo era pensaron que era muy fácil.
E: Hay un ejercicio donde se pide calcular una adjunta. ¿Qué pasa con los cambios de signo al calcular la adjunta?
S: A mí me costó entender lo de los cambios de signo.
M: Creo que aún no lo entiendo ahora, incluso después de Selectivo.
E: ¿Por qué creéis que es? ¿Por qué se practicó poco?
M: Lo hicimos muchas veces pero a mí siempre me salía mal.
E: ¿Falla algo de la explicación?

M: No, cuando me lo explicaban lo entendía pero a los dos días se me olvidaba.

E: María, en el último examen, ¿qué pasó con el tercer problema?

M: Creo que me comí un trozo. Hice el primer apartado, los otros los sabía pero me los salté.

E: Entonces, ¿los entiendes?

M: Sí.

E: En el primer examen tienes un error en el cálculo del determinante, ¿puedes ver cuál es?

M: Debería multiplicar el número al final, por el resultado del determinante.

E: En este examen tienes un error ahí por las propiedades del determinante y luego tienes estas preguntas en blanco, que son propiedades de los determinantes. ¿Qué pasaba, no las entendías o no las habías estudiado?

M: Ni una cosa ni otra.

E: Ahora están estudiadas, ¿serías capaz de resolver estas preguntas?

M: Sí, en la primera, el determinante de la inversa es 1 partido por el determinante de la matriz. El otro sería 2 por el determinante de la matriz, ¿no?

E: No. Bueno, acabamos la entrevista. ¿Queréis comentar algo?

M: Para no haberlo visto en ningún curso es un tema bastante fácil.

S: Esto fue lo más fácil de todo el curso.

E: ¿Se podría entender en 1º o en 4º?

M, S: Sí.

ANEXO 4

CUESTIONES PROPUESTAS EN LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

Galicia. Junio 2004

1- Halle tres números sabiendo que el primero menos el segundo es igual a un quinto del tercero, que si al doble del primero le restamos 6 nos queda la suma del segundo y el tercero y, además, el triple del segundo menos el doble del tercero es igual al primero menos 8.

2- Demuestre que toda matriz cuadrada 3-dimensional se puede escribir como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

3- a) Explicar brevemente (en no más de cinco líneas) cómo se aplica el método de Gauss para calcular el rango de una matriz.

b) Determine, utilizando el método de Gauss, el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4- Tres trabajadores A, B, C, al concluir un determinado mes, presentan a su empresa la siguiente plantilla de producción, correspondiente a las horas de trabajo, dietas de mantenimiento y kilómetros de desplazamiento que han realizado cada uno de ellos.

	Horas de trabajo	Dietas	km
A	40	10	150
B	60	15	250
C	30	6	100

Sabiendo que la empresa paga a los tres trabjadores la misma retribución: x euros por hora trabajada, y euros por cada dieta y z euros por kilómetro de desplazamiento, y que paga ese mes un total de 924 euros al trabajador A, 1390 euros al trabajador B y 649 euros al C, calcular x, y, z.

Galicia. Junio 2002

5- Se consideran las matrices A y B que verifican A+B = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, A-B = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular A^2-B^2.

6- Calcule, por transformaciones elementales (sin emplear la regla de Sarrus) y justificando los pasos, el determinante $\begin{vmatrix} 2+a & b & c \\ a & 2+b & c \\ a & b & 2+c \end{vmatrix}$.

7- Resolver matricialmente la ecuación A^TX-B = 0 siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y donde A^T denota la matriz traspuesta de A.

Galicia. Setiembre 2003

8- Demuestre que la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ verifica una ecuación del tipo $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$, determinando α y β (I denota la matriz identidad). Utilice este hecho para calcular la inversa de A.

9- Discuta e interprete geométricamente, según el parámetro a, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x - y = ax \\ 5x + y + 2z = ay \\ 4y + 3z = az \end{cases}$$

10- - En la siguiente tabla se indica la audiencia prevista (en miles de espectadores) por tres cadenas de TV (A, B, C) en una determinada semana y en cada uno de los tres segmentos horarios (Mañana: M, Tarde: T, Noche: N).

	A	B	C
M	40	60	20
T	60	40	30
N	100	80	90

Sin embargo, como consecuencia de la calidad de los programas emitidos, se produjo en la audiencia prevista (y en todos los segmentos horarios) una reducción del 10% para la cadena A, una reducción del 5% para B y un aumento del 20% para C.

a) Obtén la matriz que representa la nueva audiencia de las tres cadenas A, B, C en los tres segmentos horarios M, N, T.
b) Sabiendo que el beneficio que obtiene cada cadena por espectador es de 3 euros por la mañana, 4 euros por la tarde y 6 euros por la noche, obtener mediante cálculo matricial los beneficios para cada una de las tres cadenas.

Galicia. Setiembre 2004

11- a) Enunciado de la regla de Cramer.

b) Determine los coeficientes del polinomio de grado dos cuya gráfica pasa por los puntos (0,5), (1,7) y (-1,5). ¿Puede haber otro polinomio de segundo grado que pase por esos tres puntos? Razone su respuesta.

12- a) Exprese la condición que tienen que cumplir dos matrices M y N para que pueda realizarse su suma. Y si lo que pretendemos es multiplicarlas, ¿qué condición deben cumplir las matrices?

b) Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, halla una matriz X tal que AX+B = 0.

Galicia. Junio 2002

13- a) Definición de producto de matrices.

b) Dadas tres matrices A, B y C se sabe que ABC $\in M_{2\times3}$ y que BC $\in M_{4\times3}$. ¿Cuál es el orden de A?

14- a) Enunciado del Teorema de Rouché-Frobeniüs.

b) ¿Es compatible determinado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x+2z=2 \\ 5x+2y=1 \\ x-2y+4z=3 \end{cases}$? Justifique su respuesta. Como consecuencia de su respuesta anterior, justifique si tiene una, ninguna o más de una solución ese sistema.

15- - Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular A^2.
b) Resolver la ecuación matricial $A^2X+AB = B$.

Galicia. Setiembre 2002

16- Discuta el siguiente sistema de ecuaciones según el valor de a y resuélvalo en el caso en que sea compatble indeterminado: $\begin{cases} x+y+z=a-1 \\ ax+2y+z=a \\ x+y+az=1 \end{cases}$

17- Halle, si existe, una matriz X que verifique la ecuación $B^2X - BX + X = B$ siendo $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

18- Dado el sistema 2x-y = 2, x-y+z = 2, y-z = -1, exprésalo matricialmente AX = B, calcula la matriz inversa de A y resuélvelo.

19- Resuelve la ecuación matricial AX+X = B, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Galicia. Junio 2001

20- a) Propiedades del producto de matrices. (sólo enunciarlas)

b) Sean $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y N = M + I, donde I denota la matriz identidad de orden n, calcule N^2 y M^3. ¿Son M o N inversibles? Razone la respuesta.

21- a) Propiedades de los determinantes. (sólo enunciarlas)

b) Sean F_1, F_2, F_3, F_4 las filas de una matriz cuadrada P de orden 4×4, tal que su determinante vale 3. Calcula razonadamente el valor del determinante de la inversa de P, el valor del determinante de la matriz αP, donde α denota un número real no nulo, y el valor del determinante de la matriz tal que sus filas son $2F_1$-F_4, F_3, $7F_2$ e F_4.

22- Calcula la matriz X tal que AX = A + B, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Galicia. Setiembre 2001

23- Calcula a para que el siguiente sistema homogéneo tenga más soluciones que la trivial. Resuélvelo para dicho valor de a y da unha interpretación geométrica del sistema de ecuaciones e de su solución: $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x+y-az=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$.

24- Calcula los valores del parámetro α para los que la matriz M no tiene inversa. Calcula la matriz inversa de M para α = 2 si es posible. M = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha & 3 \\ 4 & 1 & -\alpha \end{pmatrix}$.

25- Resolver la ecuación matricial AX = BX + C siendo: $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Andalucía. Junio 2004

26- Considera este sistema de ecuaciones $\begin{cases} mx-y=1 \\ x-my=2m-1 \end{cases}$

a) Clasifica el sistema según los valores de m.

b) Calcula los valores de m para los que el sistema tiene una solución en la que x = 3.

27- Considera las matrices siguientes: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula AB, AC, A^TB^T, C^TA^T, siendo A^T, B^T, C^T, las matrices traspuestas de A, B, C, respectivamente.

b) Razona cuáles de las matrices A, B, C y AB tiene matriz inversa y en los casos en que la respuesta sea afirmativa, halla la correspondiente matriz inversa.

Cantabria. Junio 2004

28- Considera la siguiente matriz A = $\begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}$, donde a es distinta de 0.

a) Calcula A^2.

b) Calcula A^{-1}.

c) Calcula razonadamente A^{20}.

d) Calcula razonadamente $\det(A^{19})$.

29- a) El siguiente sistema es compatible y determinado. Calcula su solución.

$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 4y + 3z = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

b) Considera ahora el sistema: $\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 4y + az = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x + ay + 2z = 1 \end{cases}$

- ¿Es posible encontrar valores para a tales que el sistema sea incompatible? En caso afirmativo, indica cuáles. Justifica tu respuesta.
- ¿Es posible encontrar valores para a tales que el sistema sea compatible indeterminado? En caso afirmativo, indica cuáles. Justifica tu respuesta.

Castilla-La Mancha. Junio 2004

30- a) Determina la matriz X para que la ecuación C(A + X)B = I tenga solución, donde A, B y C son matrices con inversa de orden n e I es la matriz identidad de orden n.

b) Aplica el resultado anterior para $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Galicia. Junio 2005

31- Halle todas las matrices $A = (a_{ij})$, cuadradas de orden 3, tales que $a_{21} = a_{32} = 0$ y $A + A^T = 4I$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y A^T la matriz traspuesta de A, de las que además se sabe que su determinante es 10.

32- Discuta e interprete geométricamente, según los diferentes valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} -x+y-z=-1 \\ 4x-2y+2z=2m \\ -3x-2y+mz=-4 \end{cases}$

Castilla-La Mancha. Junio 2004

33- Se considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} (m+2)x+(m-1)y-z=3 \\ mx-y+z=2 \\ x+my-z=0 \end{cases}$

a) Discútelo para los distintos valores de m.

b) Resuélvelo para m = 1.

Castilla y León. Junio 2004

34- Se tiene una matriz M cuadrada de orden 3 cuyas columnas son respectivamente C_1, C_2 y C_3 y cuyo determinante vale 2. Se considera la matriz A cuyas columnas son $-C_2$, $C_3 + C_2$, $3C_1$. Calcúlese razonadamente el determinante de A^{-1} en caso de que exista esa matriz.

35- Se considera el sistema $\begin{cases} x+y+z=\lambda \\ x+y+\lambda z=1 \\ x+\lambda y+z=1 \end{cases}$

a) Discútase según los valores del parámetro λ.

b) Resuélvase para λ = -3.

c) Resuélvase para λ = 1.

36- Dada la matriz B = $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, hállese una matriz X que verifique la ecuación XB +B = B^{-1}

Cataluña. Junio 2004

37- Considérese los puntos del espacio A(1,1,0), B(0,1,2) y C(-1,2,-1). Nos dicen que estos tres puntos forman parte del conjunto de soluciones de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Se pide:

a) ¿Están estos puntos alineados?

b) ¿Podemos averiguar el rango de la matriz del sistema de ecuaciones?

Razone adecuadamente las respuestas.

38- Considere el sistema siguiente donde m es un parámetro:

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ -2x + y + z = -1 \\ (2-2m)x + (2m-2)z = m-1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema según los valores de m.

b) Resuélva los casos compatibles.

c) En cada uno de los casos de la discusión del apartado a), dé una interpretación geométrica del sistema.

Comunidad Valenciana. Junio 2004.

39- Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x - y + z = \lambda \\ \lambda x + 2y - z = 3\lambda \\ 2x + \lambda y - 2z = 6 \end{cases}$ con λ parámetro real, se pide:

a) Determinar razonadamente para qué valores de λ es compatible determindado, compatible indeterminado e incompatible.

b) Hallar el conjunto de las soluciones del sistema para el caso compatible determinado.

c) Hallar el conjunto de las soluciones del sistema para el caso compatiblein determinado.

40- Determinar el valore real de x para el que se cumple la siguiente propiedad: el determinante de la matriz 2B es 160, siendo B = $\begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{pmatrix}$

Extremadura. Junio 2004

41- Determinar todas las matrices X tales que AX = XA, donde A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

42- Hallar una matriz con tres filas y tres columnas que tenga tres elementos nulos y tal que ninguno de sus menores de orden dos sea nulo.

Islas Baleares. Junio 2004

43- Estudiar el sistema según los valores de k y resolverlo para k = 1:
$$\begin{cases} x+y+z=k \\ x+(1+k)y+z=2k \\ x+y+(1+k)z=0 \end{cases}$$

44- Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$

Islas Canarias. Junio 2004

45- Discutir y resolver según los valores del parámetro m este sistema: $\begin{cases} 2x-y+z=m^2 \\ -x+2y=0 \\ mx-y+z=1 \end{cases}$

46- a) Determinar para qué valor de m tiene inversa esta matriz: $\begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ m & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Calcular la matriz inversa para ese valor de m.

<u>Madrid. Junio 2004</u>

47- Dado el sistema $\begin{cases} (1-a)x-2y+4z=0 \\ x-(1+a)y+z=0 \\ -x+ay-z=0 \end{cases}$

a) Estudiar la compatibilidad según los valores del parámetro a.

b) resolver el sistema enterior cuando sea compatible indeterminado.

48- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar A^{-1}.

b) Hallar la matriz X tal que $AXA^T = B$, donde A^T significa la matriz traspuesta de A.

49- a) Dado el sistema $\begin{cases} x+2y=1 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$, escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$, distinta de las dos anteriores, de manera que el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas resultante sea compatible indeterminado.

<u>Andalucía. Junio 2005</u>

50- Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) ¿Tiene A inversa? En caso afirmativo calcúlala.

b) Determinar la matriz X que cumple la siguiente igualdad: $AX + CB^T = BB^T$, siendo B^T la matriz traspuesta de B.

51- Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ -\lambda x+3y+z=-7 \\ x+2y+(\lambda+2)z=-5 \end{cases}$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.

b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Cantabria. Junio 2005

52- Responde si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifica tu respuesta:

a) Si A y B son dos matrices cuadradas cualesquiera, se cumple que $(A+B)^2 = A^2 + B^2 +2AB$.

b) Si A es una matriz cuadrada que cumple $A^2 = (0)$, entonces tiene que ser A = (0).

c) si A es una matriz cuadrada cualquiera, se cumple que: $(A+I)(A-I) = A^2-I$

53- a) Calcula el carácter del sistema de ecuaciones lineales siguiente en función del parámetro m: $S \equiv \begin{cases} mx+2y=m \\ 3x-y=m \\ x-y+z=4 \end{cases}$

b) Resuélvelo para el valor m = 0.

c) Sustituye la tercera ecuación de S por otra ecuación de forma que el sistema resultante sea compatible indeterminado para cualquier valor de m.

Castilla-La Msncha. Junio 2005

54- Dado el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro a: $\begin{cases} x+2y+z=a \\ x+y-az=a \\ 2x+3y+z=a \end{cases}$, se pide:

a) Discusión del mismo en función del valor del parámetro a.

b) Resolución en el caso de que $a \neq 0$.

55- Si la matriz A = $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tiene su determinante igual a n, averigua, utilizando las propiedades de los determinantes, el valor del determinante de las matrices siguientes $B = \begin{pmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{pmatrix}$

Castilla y León. Junio 2005

56- a) Discútase el sistema $\begin{cases} x + ay - z = 2 \\ 2x + y + az = 0 \\ 3x + (a+1)y - z = a - 1 \end{cases}$ en función del valor de a.

b) Para el valor a = 1, hállese, si procede, la solución del sistema anterior.

57- Sea A una matriz 2×2 de columnas C_1, C_2 y determinante 4. Sea B otra matriz 2×2 de determinante 2. Si C es la matriz de columnas $C_1 + C_2$ y $3C_2$, calcúlese el determinante de la matriz BC^{-1}.

58- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, hállense las matrices X que satisfacen $XC + A = C + A^2$

Cataluña. Junio 2005

59- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde a y b son números reales, halla los valores de a y b que hacen que las dos matrices conmuten, es decir, que hagan cierta la igualdad AB = BA.

60- De tres números x,y,z sabemos lo siguiente: que el primero más el segundo suman 0; que el primero más el tercero suman 1; que la suma de los tres es 0 y, para terminar, que el primero multiplicado por un número k más el doble de la suma del segundo y el tercero da 1.

a) ¿Qué puedes decir del valor de k?

b) ¿Cuánto valen los tres números?

Comunidad Valenciana. Junio 2005

61- Calcular los valores x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4 que satisfacen las siguientes ecuaciones $\begin{cases} 2AX - 3AY = B \\ AX - AY = C \end{cases}$

donde $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}$

62- El sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + \alpha y + \alpha^2 z = -1 \\ x + \alpha y + \alpha z = \alpha \\ x + \alpha^2 y + \alpha^2 z = \alpha^2 \end{cases}$ depende del parámetro real α. Discutir para qué valores de α es incompatible, compatible determinado y compatible indeterminado, y resolverlo en los casos compatibles.

Galicia. Setiembre 2006

63- Dada la ecuación matricial XA + B^T = 2X, siendo B^T la matriz traspuesta de B y

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Despejar la matriz X.

b) Hallar la matriz inversa de A-2I, sinedo I la matriz identidad de orden 3.

c) Resolver la ecuación matricial.

Andalucía. Junio 2002

64- Un cliente de un supermercado ha pagado un total de 156€ por 24 litros de leche, 6 kg de jamón serrano y 12 litros de aceite de oliva. Plantee y resuelva un sistema de ecuaciones para calcular el precio unitario de cada artículo, sabiendo que un litro de aceite custa el triple que un litro de leche y que un kilo de jamón cuesta igual que 4 litros de aceite más 4 litros de leche.

Cantabria. Junio 2002

65- Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$, se pide hallar:

1º) $(A^{-1})^2$

2º) $(A^2)^{-1}$

66- En una clínica dental colocan tres tipos de prótesis P_1, P_2, P_3 en dos modelos diferentes M_1 y M_2. El número de prótesis que tienen ya construidas viene dado por la matriz B y el precio de cada una la matriz A

$$A = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 16 & 12 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 150 & 160 & 240 \\ 210 & 190 & 220 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Obtener, si es posible, las matrices C = AB y D = BA.

b) ¿Qué información proporcionan los elementos c_{12} de la matriz C y el elemento d_{22} de D?

c) ¿Qué elemento de C o de D proporciona el valor total de todas las prótesis de tipo P_2?

67- De la edad de tres hermanos, Ana, Jesús y Fernando, se sabe que: el doble de la edad de Ana más el triple de la edad de Jesús es tres años superior a 4 veces la edad de Fernando; el triple de la edad de Fernando menos el doble de la edad de Jesús es 7 años inferior al doble de la edad de Ana; y el doble de la edad de Ana más el doble de la edad de Fernando es tres años inferior a 5 veces la edad de Jesús. Calcular la edad de cada uno de los hermanos.

Castilla y León. Junio 2002

68- Se considera el sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ my+z=0 \\ x+(1+m)y+mz=m+1 \end{cases}$

a) Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro m.

b) Resuelve el sistema para m = 0.

69- Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 2.

a) Indica cuándo es cierta la igualdad $(A+B)(A-B) = A^2-B^2$

b) Pon un ejemplo en que dicha igualdad sea falsa.

Cataluña. Junio 2002

70- En un determinado pueblo se representan tres espectáculos que llamaremos E_1, E_2, E_3, respectivamente, cada uno con un precio diferente. Calcula el precio de cada espectáculo sabiendo lo siguiente:

a) Si asistiéramos dos veces a E_1, una vez a E_2 y una vez a E_3, nos costaría 34 euros.

b) Si asistiéramos tres veces a E_1 y una a E_2, nos costaría 46,50 euros.

c) En el caso de asistir una vez a cada uno de los tres espectáculos, nos costaría 21,50 euros.

Comunidad Valenciana. Junio 2002

71- Un tren transporta 500 viajeros y la recaudación del importe de sus billetes asciende a 2115 euros. Calcular de forma razonada cuántoa viajeros han pagado el importe total del billete, que vale 9 euros, cuántos han pagado el 20% del billete y cuántos el 50%, sabiendo que el número de viajeros que han pagado el 20% es el doble del número de viajeros que ha pagado el billete entero.

Extremadura. Junio 2002

72- Resolver la ecuación matricial A + BX = I, donde

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

e I es la matriz identidad de orden tres. Justifica la respuesta.

Extremadura. Junio 2005

73- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ m & 1 & -2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) ¿Para qué valor o valores de m noexiste la matriz inversa de A?

b) Determinar la matriz inversa de A cuando m = 2.

Justificar la respuesta.

Galicia. Junio 2005

74- Un fabricante produce tres artículos diferentes A,B,C, cada uno de los cuales precisa para su elaboración de tres materias prias M_1, M_2, M_3. En la siguiente tabla se representa el número de unidades de cada materia prima que se requiere para elaborar una unidad de cada producto.

	A	B	C
M_1	2	1	3
M_2	3	2	2
M_3	1	2	4

Dispone de 50 unidades de M_1, 70 de M_2 y 40 de M_3.

a) Determinar las cantidades de artíulos A, B, C que producce dicho fabricante.

b) Si los precios de venta de cada artículo son, respectivamente, 500, 600 y 1000 euros y si gasta en cada unidad de materia prima 50, 70 y 60 euros, respectivamente, determinar el beneficio total que consigue con la venta de toda la producción obtenida (utilizando todos los recursos disponibles).

Islas Baleares. Junio 2005

75- Tres familias van a una cafetería. La primera familia toma dos cafés, un cortado y dos descafeinados; la segunda familia toma tres cafés y dos cortados; y la tercera familia toma un café y dos descafeinados. A la primera familia le cobran 5 euros, a la segunda

5,10 euros y a la tercera, 2,90 euros. Se denotan por x,y,z las incógnitas que representan, respectivamente, el precio de un café, de un cortado y de un descafeinado.

a) Dé la matriz S que expresa el número de cafés, de cortados y de descafeinados que toma cada una de las tres familias, de manera que AX = B con $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 5'1 \\ 2'9 \end{pmatrix}$

b) Calcule A^{-1}

c) Resuelva la ecuación matricial AX = B.

76- Considere el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro m:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - z = 1 \\ 2x + 2y + (m+1)z = 0 \end{cases}$$

Discútalo y resuélvalo para los valores de m que lo hacen compatible.

<u>Islas Canarias. Junio 2005</u>

77- La edad, en años, de Juan es el doble que la suma de las edades de sus dos hijos, Pedro y Luis. A su vez, Pedro es tres años mayor que Luis. Si dentro de 10 años, la edad del padre sobrepasa en tres años a la suma de las edades de los hijos:

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Determinar la edad de cada uno de ellos.

<u>La Rioja. Junio 2005</u>

78- ¿Es posible que una matriz de tamaño 3×2 coincida con su traspuesta? ¿Y con su inversa?

79- Tres hermanos quieren reunir 26 euros para comprar un regalo a sus padres. Después de una larga discusión han decidido que el mediano debe pone el doble que el pequeño y el mayor debe poner dos terceras partes de lo que ponga el mediano. ¿Cuánto debe poner cada uno?

Madrid. Junio 2005

80- Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real k: $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x-ky-3z=0 \\ 5x+2y-=0 \end{cases}$. Se pide:

a) Discutir el sistema para los distintos valores de k.

b) Resolver el sistema en los casos en los que sea posible.

Murcia. Juio 2005

81- Estudiar para qué valores de k es compatible el sistema siguiente: $\begin{cases} 2x-y=4 \\ -x+\frac{1}{2}y=-2 \\ x+ky=2 \end{cases}$.

Resolverlo para los valores de k que lo hacen compatible indeterminado.

Navarra. Junio 2005

82- Encontrar una matriz X que verifique la igualdad AX = B, con $A=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. ¿Verifica también la matriz X la igualdad XA = B?

Oviedo. Junio 2005

83- Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix}$

a) Si AB-C = D, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x, y) en función de a.

b) ¿Para qué valores de a el sistema tiene solución? ¿Es siempre única? Encuentra una solución para a = 1 con y ≠ 1.

País Vasco. Junio 2005

84- Hallar la matriz X que cumple $A^{-1}XA = B$, siendo $A=\begin{pmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$

Zaragoza. Junio 2005

85- En un taller de joyería se fabrican collares con 50, 75 y 85 perlas y para ello se utilizan en su totalidad 17500 perlas y 240 cierres.

a) ¿Cuántos collares se han de fabricar si se desean tantos collares de tamaño mediano como la media aritmética del número de collares grandes y pequeños?

b) Sin tener en cuenta la condición del apartado anterior, ¿es posible fabricar el mismo número de collares de cada tamaño?

Islas Baleares. Junio 2002

86- La suma de las cifras de un determinado número es 13. La cifra de las centenas excede en 4 unidades la de las decenas. Si se intercambia la cifra de las unidades con la de las centenas, el número aumenta en 495 unidades. ¿De qué número se trata?

87- Considerar el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases}\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}y=0\\ x-\frac{1}{2}y=-2\end{cases}$

a) Expresarlo en la forma matricial AX = B.

b) Calcular la matriz inversa de A.

c) Resolverlo.

Islas Canarias. Junio 2002

88- Un museo tiene tres salas de exposiciones A, B, C. Los precios de las entradas son, respectivamente, 2, 4 y 7 euros. Un determinado día entraron a las tres salas un total de 210 personas, siendo la recaudación conjunta igual a 810 euros. Teniendo en cuenta que la novena parte de los visitantes de la sala A es igual a la séptima parte de los visitantes de la sal B, determinar el número de visitantes de cada sala. Justificar la respuesta.

La Rioja. Junio 2002

89- Sea la matriz 2×2: A = $\begin{pmatrix} a & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calcula el valor de a sabiendo que AA^T es una matriz diagonal.

90- Escribe un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que sea compatible indeterminado.

Madrid. Junio 2002

91- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Calcular las matrices M = AB, N = BA.

b) Calcular P^{-1}, siendo P = N-I, donde I representa la matriz identidad.

c) Resolver el sistema PX = C.

Murcia. Junio 2002

92- Por 9 entradas de butaca de patio (BP), 6 de Anfiteatro I (AI) y 9 de Anfiteatro II (AII) una persona ha pagado 480 euros. A otra persona le han cobrado 140 euros por 4 de AI y 6 de AII y una tercera persona paga 160 euros por 3 de BP, 2 de AI y 3 de AII.

a) Determinar, sólo con estos datos, el precio de BP.

b) ¿Puede determinar el precio de las entradas de AI y AII?

c) Si le dicen que el precio de las de AI es el doble de las de AII, ¿podría entonces determinar esos precios? Si la respuesta es sí, determínelos.

Navarra. Junio 2002

93- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{pmatrix}$, calcular:

a) A^2-2A-8I

b) X tal que AX = I (I es la matriz identidad 3×3)

Oviedo. Junio 2002

94- En una farmacia se comercializan tres tipos de champú de cierta marca: normal, con vitaminas y anticaspa. Se sabe que el precio al que se vende el normal es de 2 euros y el de vitaminas de 3 euros. Se desconoce el precio del anticaspa. Por otro lado, el dinero total obtenido en ventas con el champú de vitaminas y el anticaspa fue el mismo que el que hubiera obtenido vendiendo 28 unidades del anticaspa y ninguna de los demás.

a) Plantee un sistema de ecuaciones (en función del precio desconocido del champú anticaspa que se puede llamar, por ejemplo, m) donde las ioncógnitas (x,y,z) sean las unidades vendidas el mes pasado de cada tipo de champú.

b) ¿Qué puedes concluir sobre el precio del champú anticaspa a partir de un estudio de la compatibilidad del sistema?

c) Si se sabe que el número de unidades vendidas del anticaspa fue 20, utiliza el resultado del apartado b) para calcular las unidades vendidas de los otros.

País Vasco. Junio 2005

95- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&2&m\\0&3&5\\2&4&4\end{pmatrix}$

a) Encontrar los valores de m para los que existe matriz inversa.

b) Si m = 1 es uno de esos valores, hallar A^{-1}.

Zaragoza. Junio 2005

96- En una empresa trabajan 160 personas y todas ellas deben hacerse un reconocimiento médico en el plazo de tres días. El primer día se lo hace la tercera parte de los que se lo hacen durante los otros dos días. El segundo día y el tercero se lo hacen el mismo número de personas. Se pide:

a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales que permita calcular el número de trabajadores que se hacen el reconocimiento cada día.

b) Resolver el sistema de ecuaciones lineales propuesto en el apartado anterior por el método de Gauss.